Projekt koncepcyjny

systemu e-learningowego

Wirtualne Laboratoria Matematyczne

Autorzy

Anita Dąbrowicz-Tlałka (CNMiKnO, PG)
Agnieszka Patyk-Łońska (CNMiKnO, PG)

6.XI.2012, Gdańsk

Spis treści

1. Wstęp

Przedmiotem niniejszego studium koncepcyjnego jest zaprojektowanie systemu edukacyjnego ***Wirtualne Laboratoria Matematyczne*** obejmującego dziesięć modułów prezentujących zagadnienia matematyczne przerabiane podczas zajęć akademickich. System stanowić będzie istotne wsparcie procesów dydaktycznych w pracy ze studentami wszystkich wydziałów Politechniki Gdańskiej.

System musi mieć charakter modułowy, umożliwiający tworzenie poszczególnych modułów stopniowo. Powinien też charakteryzować się elastycznością umożliwiającą jego dalszą rozbudowę w zależności od przyszłych potrzeb określonych przez Zamawiającego. Docelowo system ma stanowić pomoc dla studenta i wykładowcy. Zamawiający oczekuje, że poszczególne komponenty systemu będą odznaczały się jednolitą szatą graficzną.

Wykonawca musi zaprojektować i wykonać system w taki sposób, aby zapobiegał on wszelkiego rodzaju wykluczeniom i utrudnieniom w dostępności. System musi więc być zgodny ze standardami: Web Content Accessibility Guidelines (WCAG) i Authoring Tool Accessibility Guidelines (ATAG). Szata graficzna powinna uwzględniać potrzeby i ograniczenia osób niepełnosprawnych. W szczególności, Wykonawca powinien zapewniać zwiększenie dostępności systemu dla osób z upośledzeniem narządu wzroku. Wymagane funkcjonalności to:

- wysoki kontrast z funkcją włącz/wyłącz,
- powiększenie/pomniejszenie czcionki,
- możliwość nawigacji z poziomu klawiatury (bez użycia myszki), tam gdzie jest to możliwe.

Wypracowanie założeń projektu graficznego systemu odbywać się będzie w oparciu o procedurę konsultacji Zamawiającego z Wykonawcą dotyczącą wszystkich elementów projektu graficznego. Ostateczny projekt graficzny tworzony będzie w oparciu o zaakceptowane koncepcje. Autorskie prawa majątkowe do wszelkich elementów graficznych, w które Wykonawca wyposaży system, przechodzą na rzecz Zamawiającego.

Zamawiający oczekuje, że każdy moduł będzie działać zarówno na stronie www PG jak i na platformie Moodle. Ponadto, Wykonawca przystosuje system do obsługi przez urządzenia mobilne posiadające wbudowaną przeglądarkę internetową, przy czym dopuszczalne jest, aby niektóre funkcjonalności nie były dostępne podczas korzystania z systemu z poziomu urządzeń mobilnych (np. generowanie pliku PDF lub pliku graficznego z rozwiązaniem zadania).

2. Funkcjonalności poszczególnych modułów

Zamówienie obejmuje wykonanie następujących modułów:

a) przybornik wzorów funkcji,
b) aplikacja rysująca wykresy krzywych w dwuwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich,
c) aplikacja rysująca wykresy powierzchni drugiego stopnia w trójwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich,
d) aplikacja przybliżająca wzory funkcji za pomocą wzoru Maclaurina,
e) wizualizacja obrazująca różne metody aproksymacji całki oznaczonej w kontekście jej zastosowań geometrycznych,
f) aplikacja służąca do obliczania pochodnej funkcji złożonej,
g) wizualizacja obrazująca interpretację geometryczną pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej,
h) wizualizacja obrazująca zagadnienia z geometrii analitycznej trójwymiarowej,
i) wizualizacja obrazująca zagadnienie poszukiwania funkcji odwrotnej,
j) wizualizacja utrwalająca sposób wyznaczania asymptot.

2.1. Przybornik wzorów funkcji

Komponent powinien umożliwiać użytkownikowi:

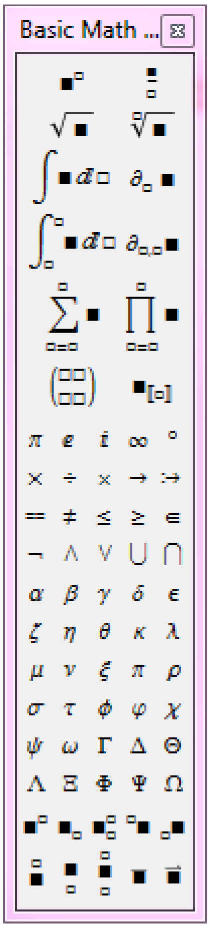
- wklikiwanie wzorów funkcji oraz ciągów,
- obejrzenie ich zapisu,
- korektę źle wklikanego wzoru.

Powinien on mieć formę panelu z następującymi **przyciskami**:

- zmienne **x**, **y** oraz **n**
- potęgi, ułamki, pierwiastki (kwadratowe i dowolnego stopnia)
- operacje **+**, **-**, *****, **/**
- kropka (dla zapisu liczb zmiennoprzecinkowych)
- nawiasy **(** oraz **)**
- stałe: od **0** do **9**, **e** oraz π
- funkcje:
  - wartość bezwzględna (zwykle oznaczana jako | | lub *abs*)
  - funkcje trygonometryczne: *sin, cos, tg, ctg, sec, csc*
  - funkcje cyklometryczne: *arcsin, arccos, arctg ,arcctg*
  - funkcje logarytmiczne: *ln*, log_a
  - funkcja wykładnicza a^x - można ją wklikać przy pomocy przycisku potęgi
  - funkcje hiperboliczne: *sinh, cosh, tgh, ctgh, sech, csch*

oraz z **wyświetlaczem** wklikanego wzoru.

Dobrym przykładem takiego komponentu jest przybornik *Basic Math Input* w programie *Mathematica*, choć nie zawiera on wszystkich funkcjonalności przewidzianych przez Zamawiającego.



Operacje matematyczne wymagające podania więcej niż jednego argumentu (np., potęga , pierwiastek  czy też ułamek ) są zobrazowane bardzo intuicyjnie i nie wymagają użycia dodatkowej etykiety. Takie wieloargumentowe operacje powinny działać na tej zasadzie, że po wpisaniu wartości w odpowiednie pole użytkownik naciska klawisz tabulacji w celu przejścia do następnego pola.

Podobnie, po naciśnięciu przycisku funkcji (np. *arcsin*), użytkownik:

- jest przeniesiony wewnątrz nawiasów funkcji,
- wklikuje tam odpowiednie wyrażenie (być może wieloargumentowe, wymagające własnego naciskania tabulacji),
- po naciśnięciu tabulacji „wychodzi" na zewnątrz nawiasów.

Poniższy przykład obrazuje potencjalny sposób wklikania wzoru *sin(x/2)*:

1. Użytkownik klika przykładowy przycisk  - na ekranie pojawia się zapis **sin( )**, z kursorem ustawionym wewnątrz nawiasów,
2. Użytkownik klika przycisk  - na ekranie pojawia się **sin (-)** z kursorem ustawionym nad kreską ułamkową,
3. Użytkownik klika zmienną *x*, naciska klawisz tabulacji, wpisuje lub klika cyfrę *2* i ponownie naciska tabulację. W tym momencie kursor znajduje się jeszcze wewnątrz nawiasów, ale już za ułamkiem (można jeszcze w tym momencie wklikać np. *+2*x* wewnątrz ciała funkcji). Dopiero naciśnięcie następnej tabulacji przenosi użytkownika poza nawiasy funkcji sinus.

Ręczne wpisywanie wzorów

Wykonawca ograniczy do minimum możliwość wpisywania wzorów z klawiatury – dopuszczalnie jest ręczne wpisywanie cyfr, kropki oraz znaków +, -, *, /. Funkcjonalność tę można pominąć, o ile Wykonawca uzna jej brak za korzystniejszy dla działania aplikacji.

Modyfikacja wzorów

Ważną opcją jest kasowanie części lub całości wzoru. Do usunięcia całego wzoru powinien być przewidziany osobny przycisk. Wykonawca sam opracuje intuicyjny mechanizm kasowania części wzoru.

Tak jak tabulacja przenosi użytkownika w kolejne pole wieloargumentowej operacji, powinna też istnieć opcja cofnięcia się do poprzedniego pola w celu dokonania modyfikacji – Zamawiający proponuje użycie klawisza strzałki „⟵". Dopuszczalne jest też naciśnięcie strzałki „⟶" oprócz lub zamiast klawisza tabulacji aby przejść do następnego pola wieloargumentowej operacji.

Swoboda notacji

Wykonawca sam zadecyduje, czy korzystne będzie interpretowanie wzorów typu „*2x*" jako „*2*x*", czy też jako wzór niepoprawny. Podobnie należy obsłużyć problem wyrażeń typu „*x/2*" – czy jest to „*0.5*x*", czy raczej jest to wzór błędny. Należy wówczas przemyśleć, czy przycisk z dzieleniem „*/*" jest w ogóle potrzebny, być może lepiej będzie obsługiwać wszystkie ułamki przyciskiem .

Zamawiający dopuszcza stosowanie różnych typów nawiasów, jeżeli stosowanie tylko jednego rodzaju będzie sprawiało problemy przy interpretacji wzoru. Przykładowo, nawiasy okalające ciało funkcji mogą być kwadratowe (np. *sin* ***[ ]***), w przeciwieństwie do nawiasów wkllikiwanych przez użytkownika (np. w wyrażeniu *x****(****2+x****)***).

Wygląd

Wykonawca zaprojektuje intuicyjny layout graficzny panelu, tak aby klawisze funkcji z tej samej kategorii (np. trygonometryczne, logarytmiczne) były zgrupowane blisko siebie. Po dłuższym przytrzymaniu myszy nad danym klawiszem powinien się wyświetlić opis działania tego klawisza, np. w żółtym „dymku" w bliskim sąsiedztwie przycisku lub w pasku na dole okna aplikacji.

Współdziałanie z innymi aplikacjami

Oprócz poprawnego wyświetlania wzoru, komponent powinien zamieniać wzór wklikany przez użytkownika na kod maszynowy, tak aby można było dokonywać obliczeń na takim wzorze lub wyświetlać jego wykres. Zamiana wklikanego wzoru na kod maszynowy powinna przebiegać zgodnie z podstawowymi zasadami arytmetyki. Jeżeli użytkownik wklikał lub wpisał coś, co nie jest interpretowalne przez komponent (z racji ewidentnego błędu lub zbyt dużego stopnia skomplikowania), należy ten fragment wyróżnić kolorystycznie i wyświetlić komunikat o błędzie.

Komponent powinien dawać możliwość zastosowania go w innych aplikacjach wykonanych w ramach Zamówienia, np. w aplikacjach obrazujących wykresy funkcji (jednej lub dwóch zmiennych), obrazujących działanie szeregu Taylora/Maclaurina, itp. Zamawiający preferuje, aby opisywany komponent wraz z towarzyszącą aplikacją był wyświetlany w jednym oknie, tzn. bez dokowania osobnych okien.

Inne aplikacje niekoniecznie będą wymagać wyświetlania wszystkich opisanych przycisków. Powinna więc istnieć możliwość wywoływania komponentu z parametrami opisującymi, które przyciski wyświetlić (lub: ukryć). Wystarczające będzie, aby taka parametryzacja dotyczyła raczej całych grup przycisków (np. wszystkie funkcje trygonometryczne).

Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

Moduł ten nie musi być dostępny na urządzeniach mobilnych.

Podręcznik użytkownika

Wykonawca opracuje tutorial opisujący kilka przykładów wklikiwania bardziej skomplikowanych wzorów, kasowania ich fragmentów oraz ewentualnej możliwości ręcznego wpisywania części wzorów. Po wstępnym odbiorze opisywanego komponentu, Zamawiający dostarczy Wykonawcy odpowiednie przykłady.

2.2. Aplikacja rysująca wykresy krzywych w dwuwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich

Aplikacja ta powinna umożliwiać użytkownikowi:

- wklikanie wzorów jednej bądź kilku funkcji przy pomocy przybornika opisanego w sekcji *2.1*.
- określenie obszaru widocznego na wykresie (także w wielokrotnościach liczb e oraz π).
- narysowanie wykresu wklikanych funkcji, a także ich sumy, różnicy, iloczynu bądź ilorazu.
- użycie najczęściej wykorzystywanych modyfikatorów funkcji:
    - wartość bezwzględna funkcji |f(x)|
    - wartość bezwzględna argumentu funkcji f(|x|)
    - zmiana znaku wartości funkcji -f(x)
    - zmiana znaku argumentu funkcji f(-x)
    - zmiana wartości funkcji o stałą f(x) ± a
    - zmiana wartości argumentu o stałą f(x±a)
    - zmiana wartości funkcji razy stałą f(x)· a
    - zmiana wartości argumentu razy stałą f(x·a)
- określenie wyróżnienia kolorystycznego dla każdej rysowanej funkcji, a także dla tła wykresu, siatki wykresu oraz osi.
- zmiany wyświetlanego obszaru poprzez:
    - jego ponowne wpisanie,
    - przesuwanie wykresu (poruszanie myszą/naciskanie strzałek),
    - użycie opcji zoom in/zoom out.
- zapisanie wzoru i wykresu w formacie PDF lub formacie graficznym.

Niezależnie od możliwości skorzystania z przybornika wzorów, użytkownik będzie mógł także wybrać zestawy wzorów funkcji z listy rozwijanej, przy czym będzie możliwe, aby jeden wpis na takiej liście zawierał kilka wzorów funkcji do odrysowania na wspólnym wykresie. Zamawiający przekaże Wykonawcy listę stosownych przykładów.

Dane wejściowe

Użytkownik powinien mieć możliwość wprowadzenia jednego lub kilku wzorów funkcji (nie więcej niż pięć) przy pomocy przybornika opisanego w sekcji *2.1*. Dodatkowo, użytkownik może wybrać, czy chce dodać, odjąć, pomnożyć bądź podzielić wpisane funkcje. Użytkownik określa też obszar widoczny na wykresie przez podanie przedziału argumentów x oraz przedziału wartości funkcji y. Dodatkowo, użytkownik powinien mieć możliwość określenia koloru i stylu (grubości i rodzaju linii) krzywej odpowiadającej danej funkcji i tła wykresu.

Zamawiający proponuje następujące rodzaje linii:

- ciągła ————
- przerywana - - - - - - -
- kropkowana …………..

Grubości: od 1px do 3px.

Kolory: co najmniej 16 podstawowych kolorów. Możliwe do wyboru kolory tła powinny stanowić jaśniejszy odcień kolorów linii, tak aby wykres funkcji nie zlewał się z tłem.

Opcjonalnymi polami do wyboru będą osie wykresu oraz siatka. Zamawiający proponuje, aby osie były rysowane domyślnie w kolorze czarnym, zakończone strzałkami, lecz bez napisów „x” i „y”. Użytkownik powinien mieć możliwość zmiany koloru osi, tak jak w przypadku wyżej opisanych elementów wykresu, a także możliwość wyłączenia ich wyświetlania. Rysowanie siatki powinno być opcjonalne dla użytkownika (domyślnie wyłączone). Domyślny kolor siatki to jasny szary, np. RGB(235,235,235), przy czym użytkownik powinien mieć możliwość zmiany tego koloru. Podziałka na osiach oraz miejsca przecinania się siatki zostały dokładniej opisane poniżej.

Dane wyjściowe

Po podaniu danych wejściowych użytkownik naciska przycisk „Rysuj” i na ekranie pojawiają się odpowiednie wykresy w odpowiednich przedziałach – w zależności od wprowadzonych danych. Dodatkowo, po najechaniu myszą na bliskie sąsiedztwo wykresu (Zamawiający proponuje próg dwóch pikseli w każdą stronę), obok kursora powinny wyświetlać się współrzędne punktu pod kursorem myszy opisane szarą czcionką nie zlewającą się z żadnym kolorem tła ani wykresu.

Modyfikacja danych

Wykonawca powinien umożliwić zmianę danych wejściowych:

- zmiana wpisanych wzorów (zgodnie z funkcjonalnością przybornika opisanego w sekcji ***2.1***.),
- zmiana liczby wpisanych wzorów funkcji (dopisanie nowych, usunięcie poprzednich),
- chwilowe wyłączenie jednego lub części wyświetlanych wykresów (opcja typu „checkbox”),
- zmiana wyświetlanego obszaru,
- zmiana operacji zachodzących między funkcjami (tzn. czy wyświetlić je każdą z osobna, czy też wykonać na nich operacje: +, -, *, /),
- zmiana styli tła, siatki, osi, linii.

Dodatkowo, aplikacja powinna być wyposażona w funkcjonalność zoom in/zoom out pozwalającą na przybliżenie wyświetlanego obszaru wykresu bądź jego oddalenie. Funkcjonalność ta ma być dostępna po kliknięciu odpowiednich przycisków w aplikacji. Zamawiający proponuje, aby była też dostępna poprzez kręcenie kółkiem myszy.

Zapis do pliku

Wykonawca umożliwi zapisanie wykresu oraz wzorów funkcji na nim przedstawionych do plików:

- PDF – osobno wzory funkcji i poniżej wykresy,
- graficznych (co najmniej JPG, BMP, PNG, GIF) – wykresy opatrzone legendą opisującą wzory funkcji.

Zapis taki powinien dopuszczać wpisanie opcjonalnego komentarza przez użytkownika.

Uwzględnianie dziedziny funkcji

Zamawiający nie wymaga, aby Wykonawca zaimplementował zaawansowane metody służące do określania dziedziny funkcji. Wiele języków programowania zwraca wartość NaN (ang. *not a number*) lub wyrzuca łatwy do obsłużenia wyjątek w razie podstawienia niedozwolonego argumentu do wzoru funkcji. W takim wypadku nie należy rysować fragmentu wykresu funkcji dla tego argumentu.

Dokładność wykresu

Zamawiający proponuje, aby do rysowania wykresu zastosować próbkowanie co (b-a)/S, gdzie S jest szerokością okna wykresu w pikselach, zaś [a,b] jest przedziałem osi X podanym przez użytkownika.

Podziałka opisująca oś X powinna w miarę możliwości zawierać liczby całkowite oraz końce przedziału podanego przez użytkownika. W przypadku wyświetlania „krótkich" przedziałów można stosować ułamki dziesiętne, stopniowane co 0.1 podniesione do odpowiedniej potęgi. Przykładowo: jeżeli użytkownik wyrazi chęć narysowania wykresu w przedziale [3.247,3.269], to na podziałce osi X powinny się znaleźć końce tego przedziału, a potem wielokrotności liczby 0.01 - ponieważ wielokrotności 0.1 nie zmieściłyby się już w tym przedziale. Będą to zatem: 3.247, 3.25, 3.26, 3.269.

Na podziałce osi Y należy zaznaczyć dokładne wartości największą i najmniejszą funkcji oraz wartości pośrednie stopniowane w podobny sposób jak na osi X. Zamawiający nie wymaga, aby Wykonawca stosował algorytmy znajdowania ekstremów funkcji – za minimum i maksimum funkcji można przyjąć odpowiednio jej najmniejszą i największą wartość dla zastosowanego próbkowania.

O ile użytkownik włączył wyświetlanie siatki, powinna ona przecinać osie i wykres w tych miejscach, w których zaznaczona jest podziałka.

Okno aplikacji

Mimo użycia przybornika opisanego w sekcji ***2.1***, cała aplikacja powinna znajdować się w jednym oknie, bez dokowania dodatkowych okien.

Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

Moduł ten nie musi być dostępny na urządzeniach mobilnych.

2.3. Aplikacja rysująca wykresy powierzchni drugiego stopnia w trójwymiarowym układzie współrzędnych kartezjańskich

Aplikacja powinna umożliwiać użytkownikowi:

- wybranie wzorów co najwyżej dwóch powierzchni (tzn. funkcji) z listy dostępnych przykładów oraz dokonanie wyboru parametrów owych funkcji,
- narysowanie wykresu obu powierzchni a także ich minimum lub maksimum, o ile użytkownik zaznaczy taką opcję,
- określenie parametrów graficznych wykresów funkcji (gradient, przezroczystość) a także tła wykresu, osi, itp.,
- możliwość zobaczenia krzywej przecięcia dwóch powierzchni,
- zmianę obszaru poprzez użycie opcji zoom in/zoom out, obracanie wykresu poprzez przeciąganie go myszą,
- zapisanie wzorów i wykresów w formacie PDF lub formacie graficznym.

Dane wejściowe

Użytkownik powinien mieć możliwość wybrania jednej lub dwóch powierzchni z wcześniej ustalonej listy (pula przykładów została opisana pod koniec tego rozdziału), a także możliwość wpisania parametrów dla tej powierzchni. W wypadku wybrania dwóch powierzchni, użytkownik może też wybrać, czy chce wyświetlić wykres będący minimum, czy maksimum tych powierzchni.

Użytkownik określa też parametry graficzne wykresu/wykresów oraz kolor tła i osi OX, OY, OZ. Zamawiający proponuje, aby osie były rysowane domyślnie w kolorze czarnym, zakończone strzałkami i opatrzone napisami „x”, „y” i „z”. Użytkownik powinien mieć możliwość zmiany koloru osi i tła a także możliwość wyłączenia wyświetlania osi. Kolory osi i tła mogą być wybierane z co najmniej 16 podstawowych kolorów. Domyślnym kolorem tła będzie biały.

Parametry graficzne wykresów powierzchni

Każda z co najwyżej dwóch powierzchni wybranych przez użytkownika powinna być rysowana na jeden z wybranych sposobów:

- gradient kolorów „zimnych” i „ciepłych” odpowiadających wartości funkcji (od niebieskiego do czerwonego),
- gradient szarości o natężeniu odpowiadającym wartości funkcji,
- gradient zieleni o natężeniu odpowiadającym wartości funkcji,
- gradient pomarańczowy o natężeniu odpowiadającym wartości funkcji,
- przezroczystość – siatka w odpowiednich dla danego punktu odcieniach szarości zamiast ciągłego koloru,

przy czym każda z maksymalnie dwóch powierzchni może być rysowana innym lub tym samym sposobem, w zależności od wyboru użytkownika. W przypadku wyboru przezroczystości obu powierzchni, powinna uaktywnić się opcja „pokaż miejsce przecięcia” – po zaznaczeniu tej opcji na wykresie powinna zostać narysowana na czerwono krzywa przecięcia obu powierzchni lub informacja, że powierzchnie te nie przecinają się.

Modyfikacja danych

Wykonawca powinien umożliwić zmianę danych wejściowych:

- zmiana wybranych wzorów powierzchni lub tylko ich parametrów,
- zamiana zmiennych w danej powierzchni (np. x-> y, y->z, z->x)
- zmiana liczby wybranych powierzchni,
- chwilowe wyłączenie jednego z wyświetlanych wykresów (opcja typu „checkbox”),
- zmiana wyświetlanego obszaru (opcje zoom in/zoom out lub obracanie wykresu),
- zmiana operacji zachodzących między funkcjami (tzn. czy wyświetlić je tak jak są napisane, czy też policzyć ich minimum bądź maksimum),
- zmiana koloru tła, osi i stylu wykresu powierzchni.

Aplikacja powinna być wyposażona w funkcjonalność zoom in/zoom out pozwalającą na przybliżenie wyświetlanego obszaru wykresu bądź jego oddalenie. Funkcjonalność ta ma być dostępna po kliknięciu odpowiednich przycisków w aplikacji. Zamawiający proponuje, aby była też dostępna poprzez kręcenie kółkiem myszy. Użytkownik powinien mieć również możliwość obracania wykresu poprzez przeciąganie myszą lub użycie strzałek.

Dziedziny funkcji, próbkowanie

Zamawiający nie wymaga, aby Wykonawca zaimplementował zaawansowane metody służące do określania dziedziny funkcji. Wiele języków programowania zwraca wartość NaN (ang. *not a number*) lub wyrzuca łatwy do obsłużenia wyjątek w razie podstawienia niedozwolonego argumentu do wzoru funkcji. W takim wypadku nie należy rysować fragmentu wykresu funkcji dla tego argumentu. Domyślny obszar rysowania wykresów powinien obejmować $x,y \in [-10,10]$. Wartości na osi OZ powinny odzwierciedlać wartości funkcji dla argumentów x, y. W przypadku, gdy wartości funkcji będą niewspółmiernie wielkie w porównaniu z wartościami argumentów, Wykonawca może zaproponować obcięcie wyświetlanego obszaru, np. do $x,y \in [-5,5]$ lub inny sposób obejścia tego problemu. Niezależnie od argumentów funkcji, podziałka na osiach powinna opisywać tylko liczby całkowite.

Dokładność wykresu, miejsca przecięcia

Zamawiający proponuje, aby do rysowania wykresu:

- w trybie przezroczystości - zastosować próbkowanie co 0.1 (i połączyć punkty prostymi odcinkami tworząc siatkę),
- w pozostałych trybach – próbkowanie co 0.01,

domyślnie dla $x,y \in [-10,10]$. W przypadku użycia przez użytkownika opcji zoom należy oczywiście wyliczyć wartości funkcji dla x,y z przedziałów zmienionych przez zoomowanie.

W trybie przezroczystości zaznaczonym dla obu powierzchni użytkownik powinien mieć możliwość zobaczenia krzywej przecięcia obu powierzchni. Może się okazać, że dla zastosowanego próbkowania co 0.1 powierzchnie nie będą się przecinać. Należy więc oprócz próbowania (dla samego wyrysowania siatki) co 0.1 zastosować osobno próbkowanie wartości x i y co 0.01: jeżeli dla punktu (x,y) wartości obu funkcji f_1 i f_2 w tym punkcie będą odległe od siebie o pewną wartość α, to należy punkty $(x,y,f_1(x,y))$ oraz $(x,y,f_2(x,y))$ pokolorować na czerwono, nawet jeżeli punkty te nie występują na wykresie „siatkowym” w trybie przezroczystości. Zamawiający proponuje, aby Wykonawca przetestował takie rozwiązanie dla niewielkich parametrów α, np. 0.01, 0.05, itd. Dokładna wartość parametru α zostanie podana przez Zamawiającego po wstępnych testach aplikacji.

Zapis do pliku

Wykonawca umożliwi zapisanie wykresu oraz wzorów funkcji na nim przedstawionych do plików:

- PDF – osobno wzory funkcji i poniżej wykresy,
- graficznych (co najmniej JPG, BMP, PNG, GIF) – wykresy opatrzone legendą opisującą wzory funkcji.

Zapis taki powinien dopuszczać wpisanie opcjonalnego komentarza przez użytkownika.

Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

Moduł ten powinien być udostępniony na urządzeniach mobilnych z okrojoną funkcjonalnością:

- użytkownik może wybrać jedne lub dwa wzory powierzchni z rozwijanej listy, jednakże nie będzie mógł określać parametrów powierzchni,
- każda z powierzchni ma być narysowana dla domyślnych parametrów podanych w dokumentacji,
- parametry graficzne również nie podlegają modyfikacji użytkownika – kolory tła, wykresów i osi powinny być domyślne,
- o ile użytkownik wybrał do narysowania dwie powierzchnie, automatycznie należy odrysować także krzywą ich przecięcia,
- użytkownik korzystający z urządzeń mobilnych nie może zapisać wykresów funkcji w formacie PDF lub w formacie graficznym.

Pula przykładów

(1) Powierzchnia z=x·y

(2) Płaszczyzny:

- Ax+By+Cz+D=0 (wartości A, B, C, D podaje użytkownik)
- $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$ (wartości A, B, C podaje użytkownik)

(3) Walec eliptyczny

- wersja podstawowa: $x^2+y^2=r^2$
- z przesunięciem i rozciągnięciem: $A(x-a)^2+B(y-b)^2=r^2$
  (warunek: $A, B > 0$, wartości domyślne: $A, B = 1$, $a, b = 0$, r – wpisywane przez użytkownika)

(4) Elipsoida/Sfera

- wersja podstawowa: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (r – podaje użytkownik)
- wersja z przesunięciem i rozciągnięciem: $\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} + \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1$
  (wartości domyślne: $a, b, c = 0$, A, B, C - podaje użytkownik)
- górna połówka: $z = +C\sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{A^2} - \frac{(y-b)^2}{B^2}} + c$
  (wartości domyślne: $a, b, c = 0$, A, B, C - podaje użytkownik, $C > 0$)
- górna połówka: $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + c$ (r, c - podaje użytkownik)
- dolna połówka: $z = -C\sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{A^2} - \frac{(y-b)^2}{B^2}} + c$
  (wartości domyślne: $a, b, c = 0$, A, B, C - podaje użytkownik, $C > 0$)
- dolna połówka: $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + c$ (r, c - podaje użytkownik)

(5) Paraboloida eliptyczna

- wersja podstawowa: $z = x^2 + y^2$
- wersja "górna" z przesunięciem i rozciągnięciem: $z = C \cdot (\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2}) + c$
  (warunek: $C > 0$, wartości domyślne: $a, b, c = 0$, $A, B, C = 1$)
- wersja "górna": $z = x^2 + y^2 + c$ (wartość domyślna: $c = 0$)
- wersja "dolna" z przesunięciem i rozciągnięciem: $z = -C \cdot (\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2}) + c$
  (warunek: $C > 0$, wartości domyślne: $a, b, c = 0$, $A, B, C = 1$)
- wersja "dolna": $z = -(x^2 + y^2) + c$ (wartość domyślna: $c = 0$)

(6) Walec paraboliczny

- wersja podstawowa: $z = x^2$
- wersja "górna" z przesunięciem i rozciągnięciem: $z = A(x-a)^2 + b$
  (warunek: $A > 0$, wartości domyślne: $a, b = 0$, $A = 1$)
- wersja "górna": $z = x^2 + b$
  (wartość domyślna: $b = 0$)
- wersja "dolna" z przesunięciem i rozciągnięciem: $z = -A(x-a)^2 + b$
  (warunek: $A > 0$, wartości domyślne: $a, b = 0$, $A = 1$)
- wersja "dolna": $z = -x^2 + b$
  (wartość domyślna: $b = 0$)

(7) Stożek eliptyczny

- wersja podstawowa: $z^2 = x^2 + y^2$
- z przesunięciem: $(z-a)^2 = x^2 + y^2$
  (wartość domyślna: $a = 0$)
- z przesunięciem i rozciągnięciem: $A \cdot (z-a)^2 = B \cdot (x-b)^2 + C \cdot (y-c)^2$
  (warunek: A, B, C są tego samego znaku, wartości domyślne: $A, B, C = 1$, $a, b, c = 0$)
- górna połówka: $z = +A\sqrt{B \cdot (x-b)^2 + C \cdot (y-c)^2} + a$
  (warunek: $A, B, C > 0$, wartości domyślne: $A, B, C = 1$, $a, b, c = 0$)
- górna połówka: $z = A\sqrt{x^2 + y^2} + a$
  (warunek: $A > 0$,wartość domyślna: $a = 0, A = 1$)
- dolna połówka: $z = -A\sqrt{B \cdot (x-b)^2 + C \cdot (y-c)^2} + a$
  (warunek: $A, B, C > 0$, wartości domyślne: $A, B, C = 1$, $a, b, c = 0$)
- dolna połówka: $z = -A\sqrt{x^2 + y^2} + a$
  (warunek: $A > 0$, wartość domyślna: $a = 0, A = 1$)

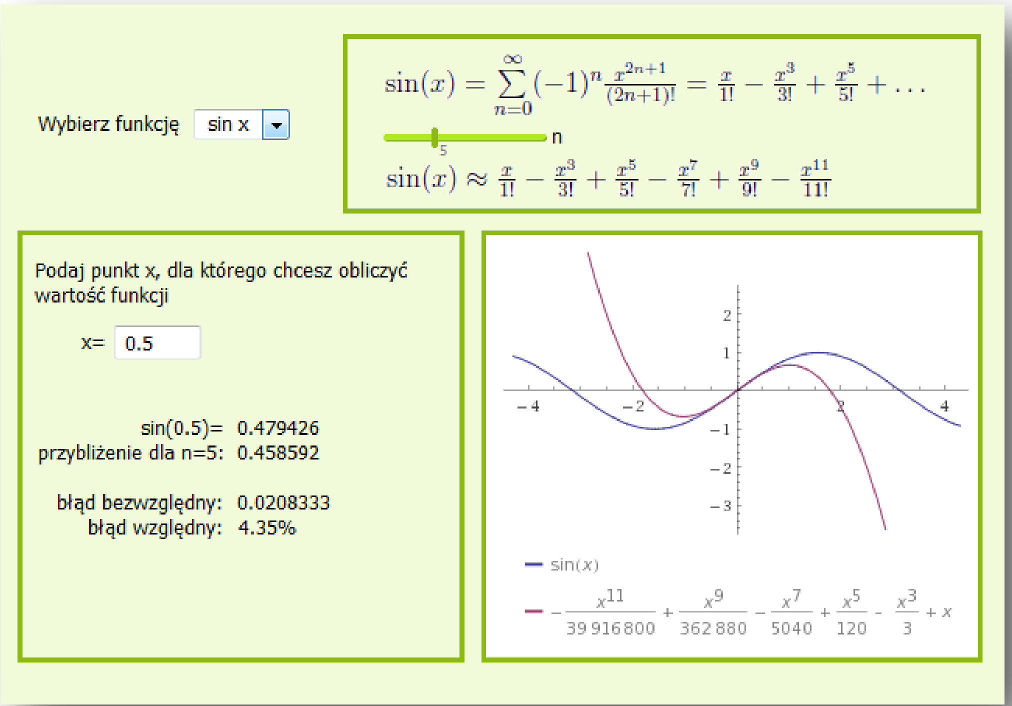
2.4. Aplikacja przybliżająca wzory funkcji za pomocą wzoru Maclaurina

Aplikacja ta powinna umożliwiać użytkownikowi:

- wybranie wzoru funkcji z puli dostępnych wzorów,
- obejrzenie wzoru Maclaurina dla wybranej funkcji – zarówno w postaci szeregu jak i w postaci wielomianu,
- obejrzenie wykresu wybranej funkcji oraz wykresu przybliżenia dla zadanego *n* (możliwość określania *n* przy pomocy suwaka - od 0 do ok. 10, przy czym końcowa wartość uzależniona jest od wielkości liczb występujących w przykładzie), gdzie *n* jest liczbą składników w wielomianie Maclaurina,
- obliczenie dokładnej wartości funkcji dla zadanego *x* oraz wartości przybliżonej (przy pomocy wielomianu Maclaurina) dla zadanego *n*.

Przykładowy wygląd aplikacji

Po wybraniu przez użytkownika wzoru funkcji, w panelu w prawym górnym rogu pojawia się wzór Maclaurina aproksymujący tę funkcję – w powyższym przykładzie widać zapis przy pomocy szeregu, następnie po znaku równości zapis wielomianowy zakończony trzema kropkami. W tym samym panelu poniżej znajduje się suwak służący do określania, ile pierwszych składników wielomianu należy wyświetlić i zastosować do obliczeń. Spora część przybliżeń za pomocą wzoru Maclaurina zawiera silnię, dlatego parametr *n* powinien mieć zakres od 0 do około 10. W przypadku otrzymywania zbyt dużych wartości (tzn. niosących ryzyko przekroczenia zakresu) Wykonawca może ograniczyć wielkość tego parametru dla rozwinięć pewnych funkcji. Natomiast dla wzorów zawierających niewielkie liczby można zwiększyć maksymalną wartość parametru *n*.



W panelu znajdującym się w prawym dolnym rogu użytkownik może zobaczyć wykres wybranej przez siebie funkcji oraz wykres przybliżenia dla wybranego przez siebie *n*. Wykres powinien przedstawiać obie funkcje w bliskim sąsiedztwie zera, oczywiście uwzględniając dziedzinę funkcji. Wykonawca sam określi przedział, w jakim będzie wyświetlany wykres funkcji oraz wykres przybliżenia – w przypadku wyboru zbyt małego przedziału w pobliżu zera, zwiększenie dokładności przybliżenia nie będzie widoczne na wykresie. Dlatego dla każdego przykładu należy dobrać osobno przedział wyświetlania wykresów.

W panelu w lewym dolnym rogu użytkownik może wpisać wartość argumentu *x*, a następnie zobaczyć wartość wybranej przez siebie funkcji dla argumentu *x* oraz wartość przybliżenia dla tego samego argumentu. Aplikacja powinna też wyświetlić błędy przybliżenia obliczone w następujący sposób:

F – funkcja wybrana przez użytkownika
P_n – przybliżenie funkcji *F* dla danego *n*

Wówczas: błąd bezwzględny $B_b = |F(x)-P_n(x)|$
błąd względny $B_w = 100\% \cdot | B_b/F(x) |$

Aplikacja powinna być odporna na wpisywanie wyrażeń innych niż liczby rzeczywiste w formacie *[znak][cyfry][kropka][cyfry]* a także na liczby nienależące do dziedziny wybranej funkcji (np. przez odpowiednie obsłużenie wyjątku NaN).

Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

Moduł ten powinien być udostępniony na urządzeniach mobilnych z okrojoną funkcjonalnością:

- zamiast korzystać z suwaka, użytkownik widzi animację w której generowane są kolejne rozwinięcia funkcji w wielomian Maclaurina od n=1 do maksymalnego n przewidzianego dla tego przykładu przez Wykonawcę.
- nie będzie można wpisać argumentu x ani obliczyć przybliżonej wartości funkcji dla tego argumentu.

Pula wzorów funkcji

Aplikacja powinna umożliwiać przybliżanie następujących funkcji:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \dots$$
$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(1-2n)} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} x^{2n-2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$
$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$$
$$e^{\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \dots$$
$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right),\ |x| < 1$$
$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots\right),\ |x| > 1$$
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

2.5. Wizualizacja obrazująca różne metody aproksymacji całki oznaczonej w kontekście jej zastosowań geometrycznych

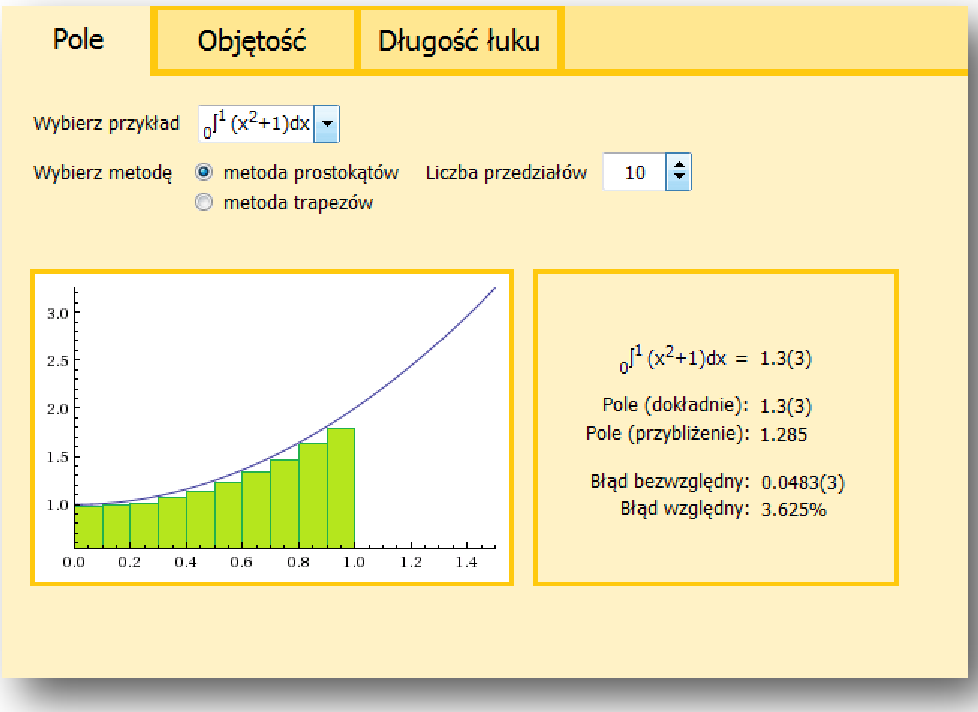
Aplikacja ma na celu przybliżenie użytkownikowi zastosowań całki oznaczonej przy pomocy całkowania numerycznego. Aplikacja powinna składać się z trzech zakładek: "Pole", "Objętość" oraz "Długość łuku". Przykłady dostępne w aplikacji zostały opisane pod koniec tego rozdziału.

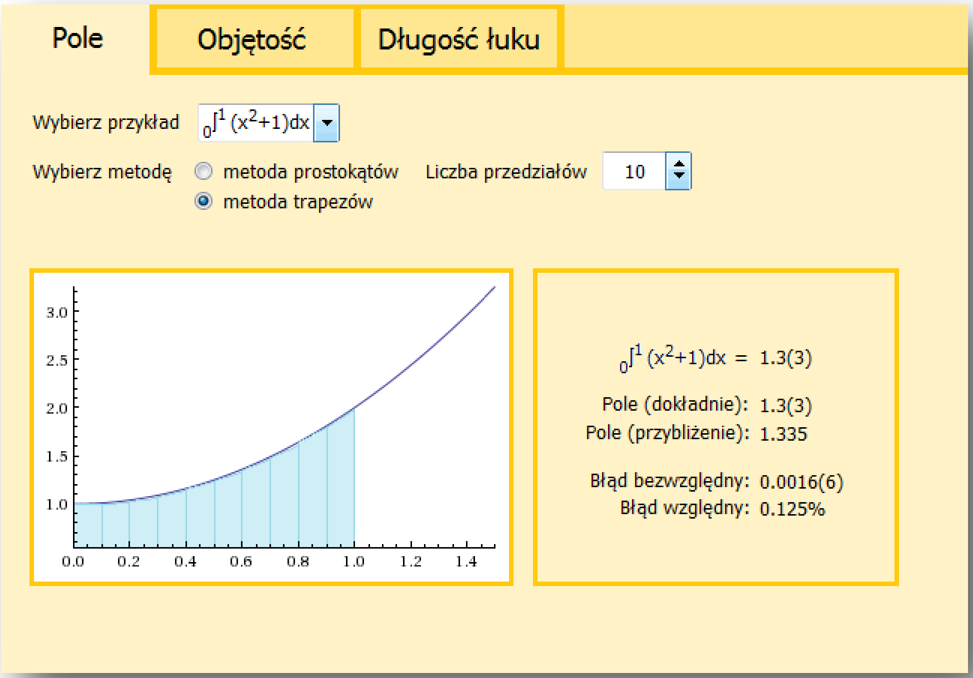
Pole

W tej części aplikacji użytkownik może wybrać jedno z kilku przykładów na obliczenie pola między krzywą a osią OX. Użytkownik wybiera też metodę całkowania oraz wskazuje, na ile podprzedziałów należy podzielić przedział dany w zadaniu (od 1 do maksymalnie 1000). Niektóre przykłady będą wymagały, aby liczba podprzedziałów była np. parzysta lub podzielna przez cztery.

Po wybraniu odpowiednich parametrów w oknie aplikacji wyświetlają się:

- wykres funkcji wybranej z rozwijanej listy wraz z zaznaczonymi prostokątami lub trapezami,
- wartość całki,
- pole między krzywą a osią OX (nie zawsze będzie ono takie samo jak wartość całki!),
- pole przybliżone przy użyciu wybranej metody,
- błąd bezwzględny oraz względny przybliżenia.





Metoda prostokątów i trapezów:

[a,b] - przedział opisany w przykładzie,

$\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ - krańce podprzedziałów w liczbie n wyznaczonej przez użytkownika, tzn:

$x_0=a,\ x_n=b,\ x_i=x_{i-1}+(b-a)/n$

F - funkcja dana w przykładzie

P_d - pole dokładne

P_{pp} - pole między krzywą F a osią OX przybliżone metodą prostokątów

P_{pt} - pole między krzywą F a osią OX przybliżone metodą trapezów

$$P_{pp} = \Big(\min\{|F(x_0)|,|F(x_1)|\} + \min\{|F(x_1)|,|F(x_2)|\}+\ldots+\min\{|F(x_{n-1})|,|F(x_n)|\} \Big) * (b-a)/n$$

$$P_{pt} = \Big(0.5*(|F(x_0)|+|F(x_n)|) + |F(x_1)| + |F(x_2)| + |F(x_3)| + \ldots + |F(x_{n-1})| \Big) * (b-a)/n$$

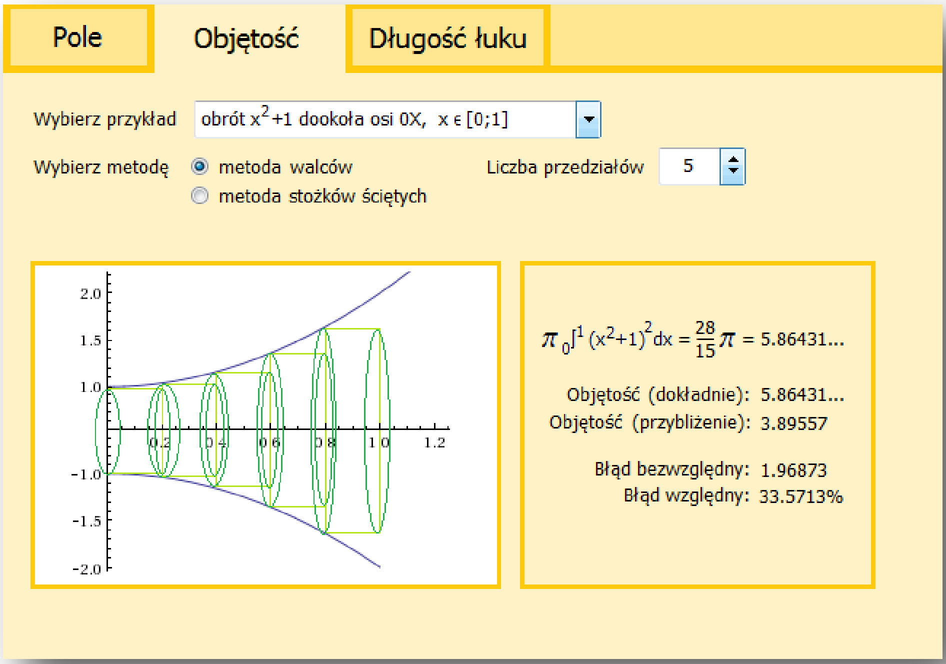
Przykłady wraz z wartościami pól i całek podano w załączniku *X.e.4.*

Błąd bezwzględny i względny należy wyliczyć następująco:

błąd bezwzględny dla metody prostokątów	$B_{bp} = \lvert P_d - P_{pp} \rvert$
błąd względny dla metody prostokątów	$B_{wp} = 100\% \cdot \lvert B_{bp}/P_d \rvert$
błąd bezwzględny dla metody trapezów	$B_{bt} = \lvert P_d - P_{pt} \rvert$
błąd względny dla metody trapezów	$B_{wt} = 100\% \cdot \lvert B_{bt}/P_d \rvert$

Objętość

Ta część aplikacji umożliwia użytkownikowi wybór jednego z kilku przykładów obrazujących obliczanie objętości przy pomocy całkowania numerycznego. Oprócz przykładu, użytkownik może wybrać metodę całkowania oraz liczbę podprzedziałów.



Metoda:

[a,b] - przedział opisany w przykładzie,

$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - krańce podprzedziałów w liczbie n wyznaczonej przez użytkownika, tzn:

$x_0=a$, $x_n=b$, $x_i=x_{i-1}+(b-a)/n$

F - funkcja dana w przykładzie

V_d – objętość dokładna

V_{pw} – objętość przybliżona metodą walców

V_{ps} – objętość przybliżona metodą stożków ściętych

$$V_{pw} = \pi * \left(\min\{|F(x_0)|,|F(x_1)|\}^2 + \min\{|F(x_1)|,|F(x_2)|\}^2+\ldots+\min\{|F(x_{n-1})|,|F(x_n)|\}^2 \right) * (b-a)/n$$

$$V_{ps} = \frac{\pi}{3}*\Big((F^2(x_0)+ F(x_0)* F(x_1)+F^2(x_1)) + (F^2(x_1)+ F(x_1)* F(x_2)+F^2(x_2))+\ldots$$
$$\ldots+(F^2(x_{n-1})+ F(x_{n-1})* F(x_n)+F^2(x_n)) \Big)*\frac{b-a}{n}$$

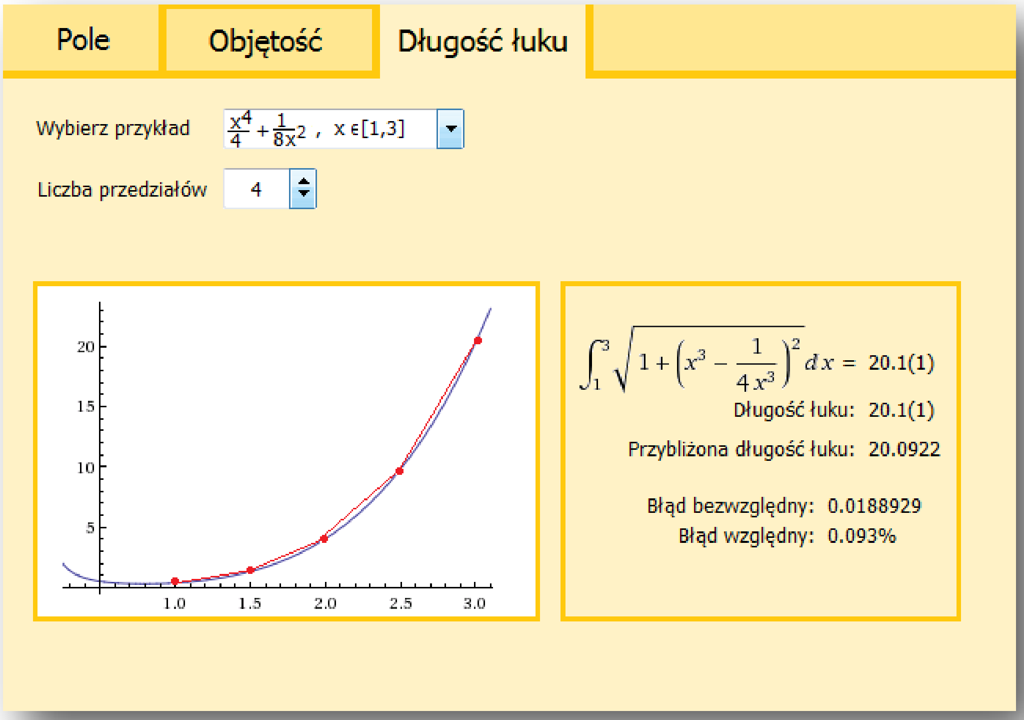
Błąd bezwzględny i względny należy wyliczyć następująco:

błąd bezwzględny dla metody walców	$B_{bw} = \lvert V_d - V_{pw} \rvert$
błąd względny dla metody walców	$B_{ww} = 100\% \cdot \lvert B_{bw}/V_d \rvert$
błąd bezwzględny dla metody stożków ściętych	$B_{bs} = \lvert V_d - V_{ps} \rvert$
błąd względny dla metody stożków ściętych	$B_{ws} = 100\% \cdot \lvert B_{bs}/V_d \rvert$

Przykłady wraz z wartościami objętości podano na końcu tego rozdziału.

Długość łuku

W tej aplikacji użytkownik wybiera jedynie przykład i liczbę podprzedziałów. Po dokonaniu wyboru, w odpowiednich panelach pojawiają się: wykres oraz obliczenia i błędy.



Metoda:

[a,b] - przedział opisany w przykładzie,

$\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ - krańce podprzedziałów w liczbie n wyznaczonej przez użytkownika, tzn:

$x_0=a$, $x_n=b$, $x_i=x_{i-1}+(b-a)/n$

d –długość podprzedziału, tzn. (b-a)/n

F - funkcja dana w przykładzie

L_d – dokładna długość łuku

L_p – przybliżona długość łuku

Sqrt[...] - pierwiastek

L_p = Sqrt[d^2 + $(F(x_1)-F(x_0))^2$] + Sqrt[d^2 + $(F(x_2)-F(x_1))^2$] + ...+ Sqrt[d^2 + $(F(x_n)-F(x_{n-1}))^2$]

Błąd bezwzględny i względny należy wyliczyć następująco:

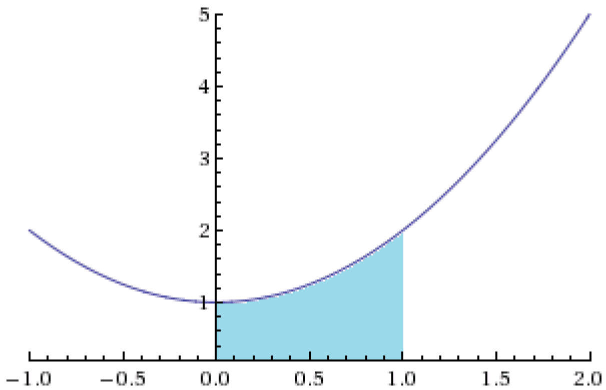
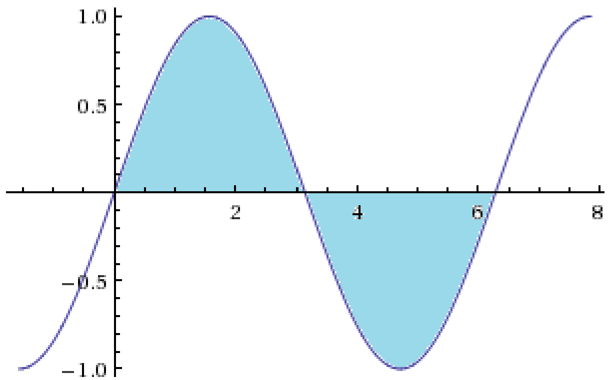
błąd bezwzględny	$B_b = \|L_d-L_p\|$
błąd względny	$B_w= 100\% \cdot \| B_b/L_d \|$

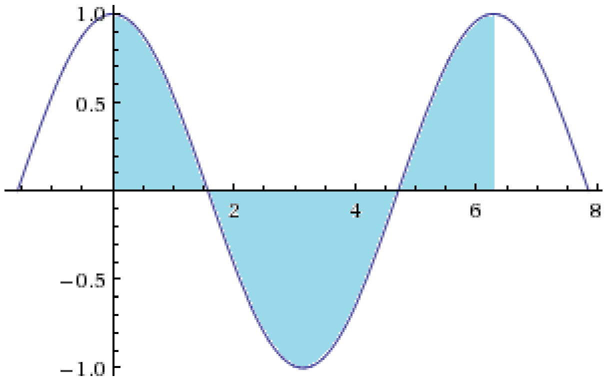
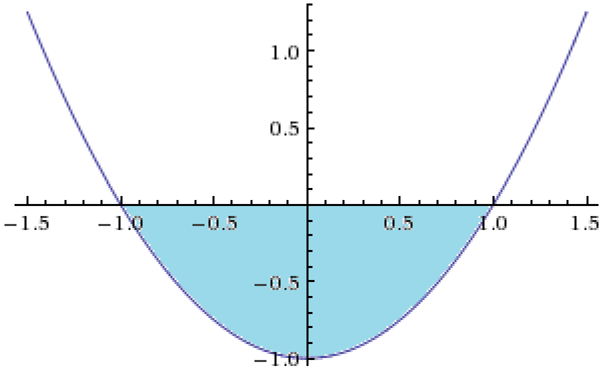
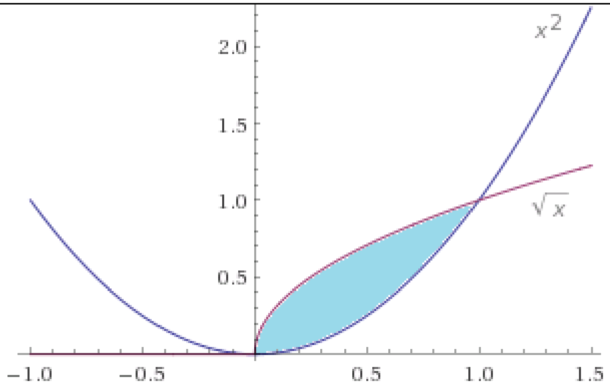
Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

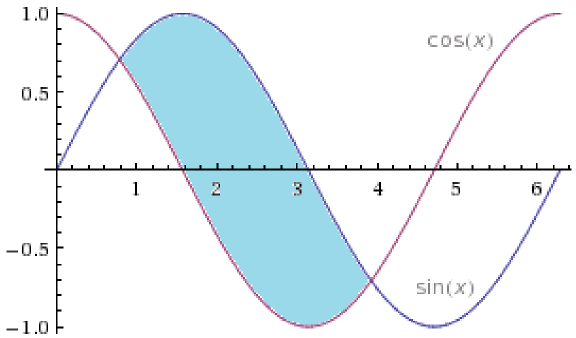
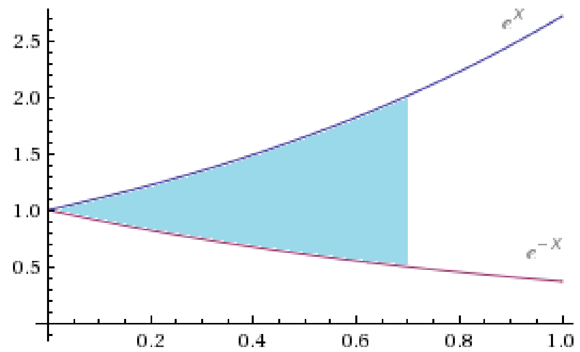
Moduł ten ma charakter animacji wymagającej od użytkownika jedynie klikania jednej z kilku opcji. Zatem na urządzeniach mobilnych nie ma potrzeby ograniczania żadnej funkcjonalności modułu.

Pula przykładów

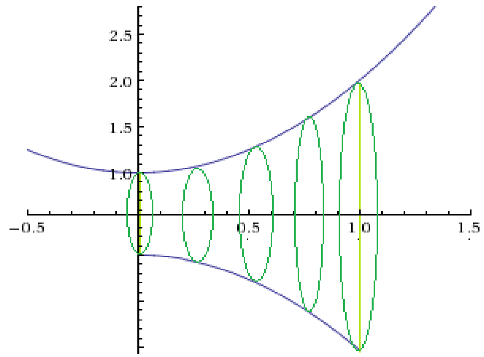
(a) Pole

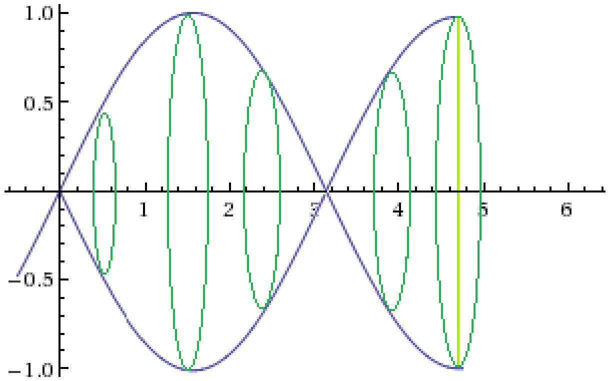
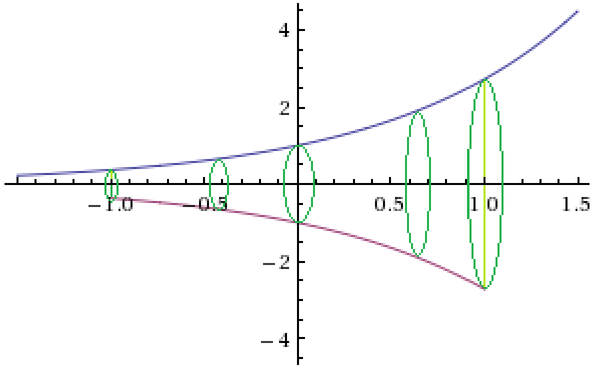
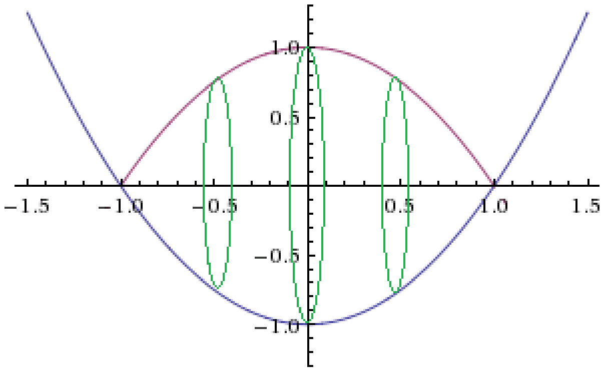
L.p.	Tekst w liście rozwijanej	O jakie pole chodzi	Całka	Wartość całki	Dokładna wielkość pola	Uwagi
1.	między wykresem x^2+1 a osią OX, x∈[0,1]		$\int_0^1 (x^2+1)dx$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	
2.	między wykresem sin(x) a osią OX, x∈[0,2π]		$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$	0	4	proszę pozwolić użytkownikowi na wybór tylko parzystej liczby podprzedziałów

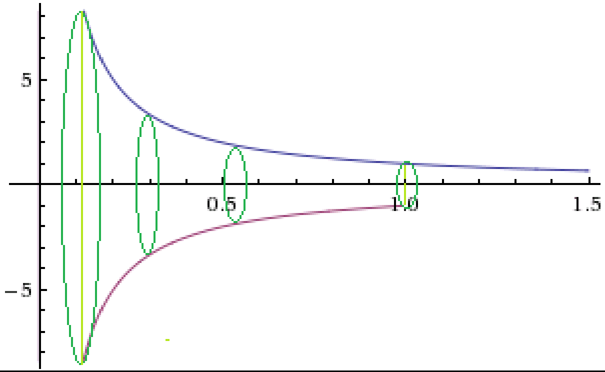
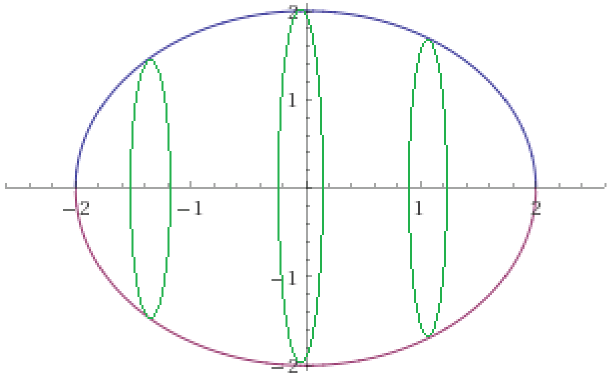
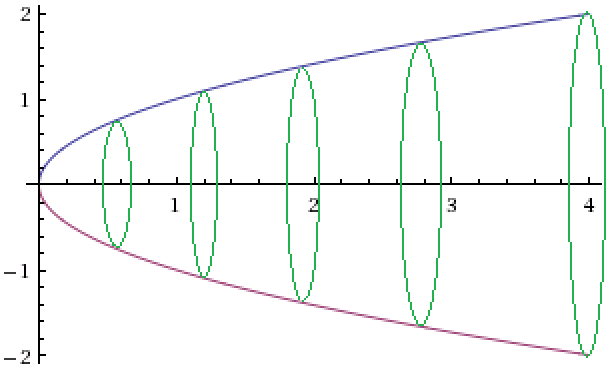
3.	między wykresem cos(x) a osią OX, $x \in [0, 2\pi]$		$\int_0^{2\pi} \cos(x)dx$	0	4	proszę pozwolić użytkownikowi na wybór tylko takiej liczby podprzedziałów, która jest podzielna przez 4
4.	między wykresem x^2-1 a osią OX, $x \in [-1,1]$		$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)dx$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	
5.	między wykresami x^2 i $\sqrt{x}$		$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

6.	między wykresami sin(x) i cos(x), x∈[π/4,5π/4]		$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin(x)-\cos(x))dx$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	
7.	między wykresami e^x i e^{-x}, x∈[0,ln2]		$\int_0^{\ln 2}(e^x-e^{-x})dx$	0.5	0.5	

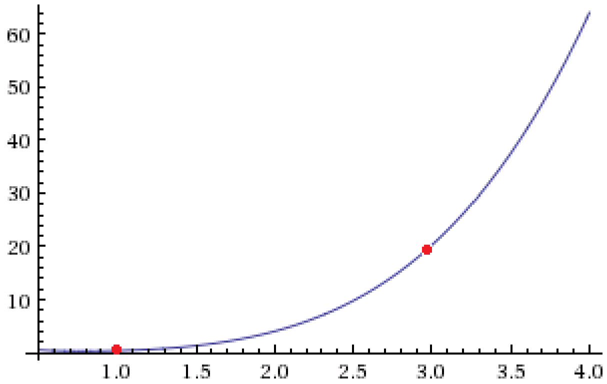
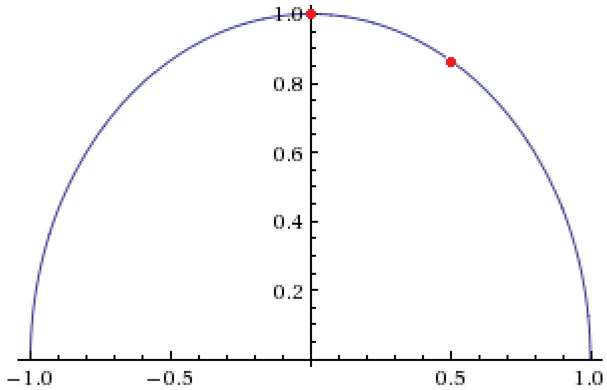
(b) Objętość

L.p.	Tekst w liście rozwijanej	O jaką bryłę chodzi	Całka	Dokładna wartość całki i objętości	Uwagi
1.	obrót x^2+1 dookoła osi OX, x∈[0,1]		$\pi\int_0^1(x^2+1)^2dx$	$\frac{28\pi}{15}$	proszę przybliżyć liczbę π dokładniej niż 3.14

2.	obrót sin(x) dookoła osi OX, x∈[0,3π/2]		$\pi \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x)^2 dx$	$\frac{3\pi^2}{4}$	proszę pozwolić użytkownikowi wybrać tylko taką liczbę podprzedziałów, która jest podzielna przez 3
3.	obrót e^x dookoła osi OX, x∈[-1,1]		$\pi \int_{-1}^{1} (e^x)^2 dx$	$\frac{\pi}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$	liczba e jest stałą Eulera, proszę użyć przybliżenia dokładniejszego niż 2.71
4.	obrót x^2-1 dookoła osi OX, x∈[-1,1]		$\pi \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^2 dx$	$\frac{16\pi}{15}$	

<table>
<tr><td>5.</td><td>obrót 1/x dookoła osi OX, x∈[0.1,1]</td><td>
</td><td>$\pi \int_{0.1}^{1} (\frac{1}{x})^2 dx$</td><td>$9\pi$</td><td></td></tr>
<tr><td>6.</td><td>obrót $\sqrt{4-x^2}$ dookoła osi OX, x∈[-2,2]</td><td>
</td><td>$\pi \int_{-2}^{2} (\sqrt{4-x^2})^2 dx$</td><td>$\frac{32\pi}{3}$</td><td></td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Obrót $\sqrt{x}$ dookoła osi OX, x∈[0,4]</td><td>
</td><td>$\pi \int_{0}^{4} (\sqrt{x})^2 dx$</td><td>$8\pi$</td><td></td></tr>
</table>

(c) Długość łuku

L.p.	Tekst w liście rozwijanej	O jaki łuk chodzi	Całka	Dokładna wartość całki i długość łuku
1.	łuk funkcji $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$ dla x∈[1,3]		$\int_1^3 \sqrt{1 + (x^3 - \frac{1}{4x^3})^2} dx$	$\frac{181}{9}$
2.	łuk funkcji $y = \sqrt{1 - x^2}$ dla x∈[0,0.5]		$\int_0^{0.5} \sqrt{1 + (\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})^2} dx$	$\frac{\pi}{6}$

2.6. Aplikacja służąca do obliczania pochodnej funkcji złożonej

Aplikacja powinna umożliwiać użytkownikowi wklikanie wzoru funkcji (przy użyciu przybornika wzorów funkcji) oraz prześledzenie kolejnych kroków obliczenia pochodnej funkcji. Niezależnie od możliwości skorzystania z przybornika wzorów, użytkownik będzie mógł także wybrać predefiniowane przykłady z listy rozwijanej. Zamawiający przekaże Wykonawcy listę stosownych przykładów.

Przykłady działania aplikacji

Przykład 1. Użytkownik wklikuje wzór funkcji **$\sin(x^2 - \ln(x^3))+17x-5$** i naciska przycisk „oblicz pochodną". Na ekranie ukazuje się następujący widok:

$$[\sin(x^2 - \ln(x^3))+17x-5]' = \cos(x^2 - \ln(x^3)) \cdot [x^2 - \ln(x^3)]' + 17 - 0 = \cos(x^2 - \ln(x^3)) \cdot (2x - (1/x^3) \cdot 3x^2)+17$$

$$2x - (1/x^3) \cdot [x^3]'$$

$$3x^2$$

Przykład 2. (*pochodna iloczynu dwóch funkcji złożonych*) Użytkownik wklikuje wzór funkcji **$\mathrm{arctg}(17\cos(4x+5)) \cdot \ln(\ln x)$** i naciska przycisk „oblicz pochodną". Na ekranie ukazuje się następujący widok:

$$[\mathrm{arctg}(17\cos(4x+5)) \cdot \ln(\ln x)]' = [\mathrm{arctg}(17\cos(4x+5))]' \cdot \ln(\ln x) + \mathrm{arctg}(17\cos(4x+5)) \cdot [\ln(\ln x)]'$$

$$1/(1 + (17\cos(4x+5))^2) \cdot [17\cos(4x+5)]' \qquad (1/\ln x) \cdot [\ln x]'$$

$$17\sin(4x+5) \cdot [4x+5]' \qquad 1/x$$

$$4$$

$$= 1/(1 + (17\cos(4x+5))^2) \cdot 17\sin(4x+5) \cdot 4 \cdot \ln(\ln x) + \mathrm{arctg}(17\cos(4x+5) \cdot (1/\ln x) \cdot (1/x)$$

Przykład 3. Użytkownik wklikuje wzór funkcji **$(\cos((2x+\sin x)^2 + (\ln x)^3))^4$** i naciska przycisk „oblicz pochodną". Na ekranie ukazuje się następujący widok:

$$[(\cos((2x+\sin x)^2 + (\ln x)^3))^4]' = 4 \cdot (\cos((2x+\sin x)^2 + (\ln x)^3))^3 \cdot [\cos((2x+\sin x)^2 + (\ln x)^3)]'$$

$$-\sin((2x+\sin x)^2 + (\ln x)^3) \cdot [(2x+\sin x)^2 + (\ln x)^3]'$$

$$2(2x+\sin x) \cdot [2x+\sin x]' \qquad 3(\ln x)^2 \cdot [\ln x]'$$

$$2 + \cos x \qquad 1/x$$

$$= 4 \cdot (\cos((2x+\sin x)^2 + (\ln x)^3))^3 \cdot (-\sin((2x+\sin x)^2 + (\ln x)^3)) \cdot (2(2x+\sin x) \cdot (2+\cos x) + 3(\ln x)^2 \cdot (1/x))$$

Jak widać w powyższych przykładach, Zamawiający nie wymaga, aby wzór będący odpowiedzią był skracany czy też upraszczany w inny sposób – bez przekształceń nawet lepiej widać, skąd się wzięły poszczególne fragmenty odpowiedzi.

Wyrażenia, dla których pochodna nie została jeszcze obliczona powinny być wyróżnione (kolorem i/lub stylem czcionki) w inny sposób niż wyrażenia już zróżniczkowane. Ostateczny wynik również powinien być zapisany innym kolorem. Zamawiający zaleca też używanie różnych typów i wielkości nawiasów w celu bardziej intuicyjnego zaprezentowania wzorów.

Ograniczenia

Przybornik wzorów wykorzystany w tej aplikacji powinien mieć zablokowane opcje:

- wartość bezwzględna,
- funkcje hiperboliczne,
- funkcje secans i cosecans,
- zmienna **n**.

Wykonawca może sam zadecydować, czy należy narzucić użytkownikowi ograniczenie liczby zagnieżdżeń funkcji, jednakże liczba ta nie może być mniejsza niż 4.

Zapis do pliku

Aplikacja umożliwi zapisanie rozwiązanego przykładu do pliku PDF. Zapis taki powinien dopuszczać wpisanie opcjonalnego komentarza przez użytkownika.

Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

Moduł ten powinien być udostępniony na urządzeniach mobilnych z okrojoną funkcjonalnością: wystarczające będzie, aby użytkownik mógł wybrać jeden z przykładów z predefiniowanej listy, tzn. bez użycia przybornika wzorów. Po dokonaniu wyboru użytkownik widzi na ekranie rozwiązanie przykładu.

Teoria

Wszystkie przykłady powinny być rozwiązane zgodnie z poniższą teorią:

$\alpha' = 0 \quad (\alpha = \text{const})$

$$(x^{\alpha})` = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(\sin x)` = \cos x$$

$$(\cos x)` = -\sin x$$

$$(tgx)` = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)` = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(a^x)` = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)` = e^x$$

$$(\ln x)` = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)` = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)` = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)` = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)` = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctg)` = -\frac{1}{1+x^2}$$

Pochodna wielokrotności funkcji: $(af)`(x) = af'(x)$

Pochodna sumy/różnicy funkcji: $(f \pm g)`(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Pochodna iloczynu funkcji: $(fg)`(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Pochodna ilorazu funkcji: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, o ile g(x) ≠ 0

Pochodna funkcji złożonej: $f`(x) = h'(g(x))g'(x)$, dla f(x)=h(g(x))

2.7. Wizualizacja obrazująca interpretację geometryczną pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

Na wizualizację składają się trzy aplikacje mające na celu przedstawienie użytkownikowi interpretację geometryczną pochodnej funkcji y=f(x), jednej zmiennej rzeczywistej jako

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha,$$

gdzie α oznacza kąt między styczną do wykresu funkcji f w punkcie P(x_0, f(x_0)) i dodatnią częścią osi Ox. Korzystamy z faktu, że geometrycznym odpowiednikiem istnienia granicy ilorazu różnicowego jest istnienie prostej stycznej w punkcie P(x_0, f(x_0)) do wykresu funkcji y = f(x).

Podziałka na osiach nie jest potrzebna w żadnej z aplikacji opisywanych w tym rozdziale.

Aplikacje nie wymagają zaawansowanej interakcji z użytkownikiem. Mają charakter samoodtwarzającej się wizualizacji pojęcia. Użytkownik musi mieć tylko możliwość zatrzymania aplikacji w dowolnej chwili oraz ponownego uruchomienia od momentu wstrzymania.

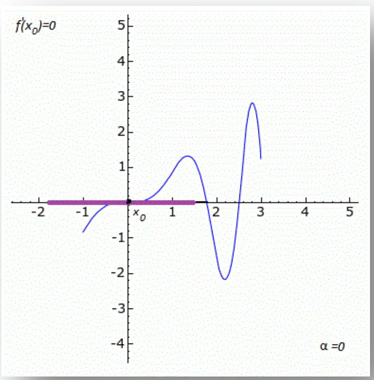
Przykładowy wygląd wizualizacji

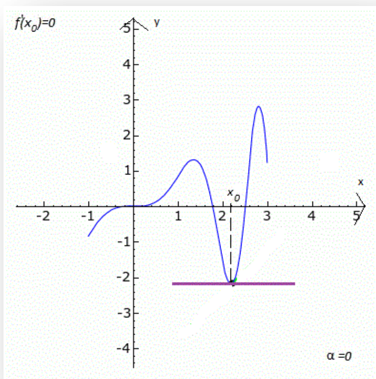
(a) Aplikacja 1

Przykładowy wykres funkcji w kolorze **A**. Osie układu współrzędnych w kolorze czarnym. W górnym lewym rogu i dolnym prawym rogu czarną czcionką są opisane poniżej wzory. Tło w kolorze białym.

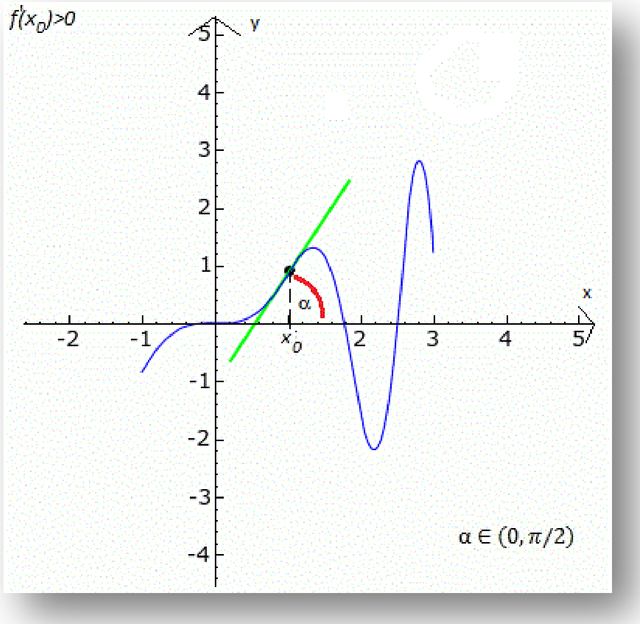
Po wykresie funkcji od lewej do prawej strony wizualizacji „ślizga się" styczna i jest zaznaczona na osi Ox zmieniająca się odcięta punktu styczności oznaczona czarną czcionką (na rysunkach poniżej x_0). Zmieniają się kolory stycznej. Mamy trzy przypadki:

- Styczna do wykresu funkcji jest równoległa do osi Ox narysowana w kolorze **B**. Równocześnie w lewym, górnym rogu wygenerowany napis „f'(x_0)=0", a w dolnym prawym rogu α=0.

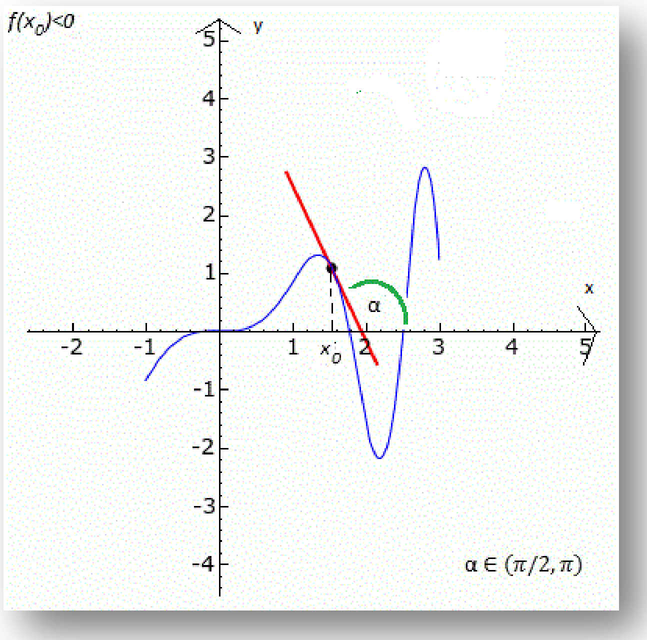




- Styczna do wykresu funkcji jest nachylona pod kątem $\alpha \in (0, \pi/2)$ do osi Ox narysowana w kolorze **C**. W kolorze o ton jaśniejszym niż **C** zaznaczony kąt z wpisanym α. Równocześnie w lewym, górnym rogu wygenerowany napis f'(x_0)>0, a w dolnym prawym rogu $\alpha \in (0, \pi/2)$.



- Styczna do wykresu funkcji jest nachylona pod kątem α ∈ $(\pi/2, \pi)$ do osi Ox narysowana w kolorze **D**. W kolorze o ton jaśniejszym niż **D** zaznaczony kąt z wpisanym α. Równocześnie w lewym, górnym rogu wygenerowany napis f'(x_0)<0, a w dolnym prawym rogu α∈ $(\pi/2, \pi)$.

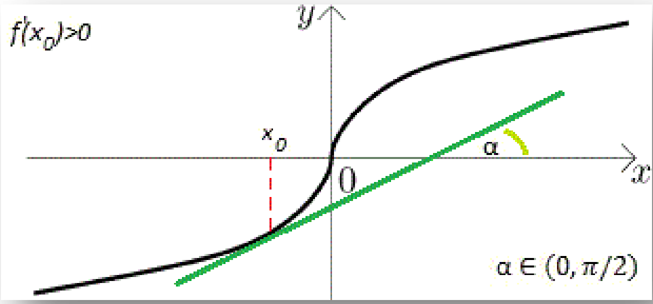


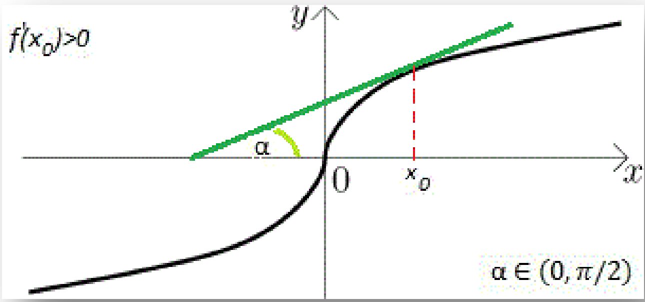
(b) Aplikacja 2

Przykładowy wykres funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w kolorze **A**. Osie układu współrzędnych w kolorze czarnym. W górnym lewym rogu i dolnym prawym rogu czarną czcionką są opisane poniżej wzory. Tło w kolorze białym.

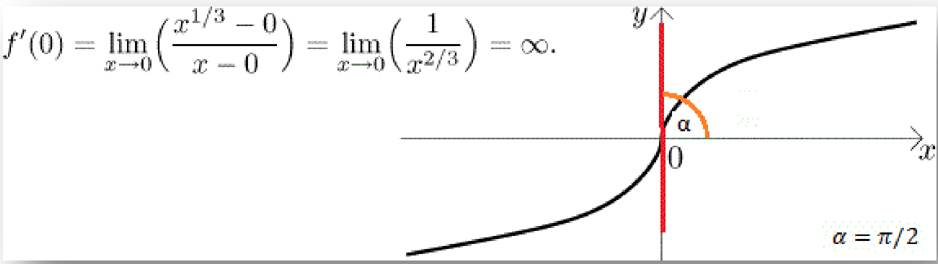
Po wykresie funkcji od lewej do prawej strony wizualizacji „ślizga się" styczna i jest zaznaczona na osi Ox zmieniająca się odcięta punktu styczności oznaczona czarną czcionką (na rysunku poniżej x_0). Zmieniają się kolory stycznej. Mamy dwa przypadki:

- Styczna do wykresu funkcji jest nachylona pod kątem $\alpha \in (0, \pi/2)$ do osi Ox narysowana w kolorze **C**. W kolorze o ton jaśniejszym niż **C** zaznaczony kąt z wpisanym α. Równocześnie w lewym, górnym rogu wygenerowany napis f'(x_0)>0, a w dolnym prawym rogu $\alpha \in (0, \pi/2)$.





- Styczna do wykresu funkcji jest prostopadła do osi Ox i narysowana w kolorze **D**. W kolorze o ton jaśniejszym niż **D** zaznaczony kąt z wpisanym α. Równocześnie w lewym, górnym rogu wygenerowany napis widoczny poniżej, a w dolnym prawym rogu $\alpha = \pi/2$.

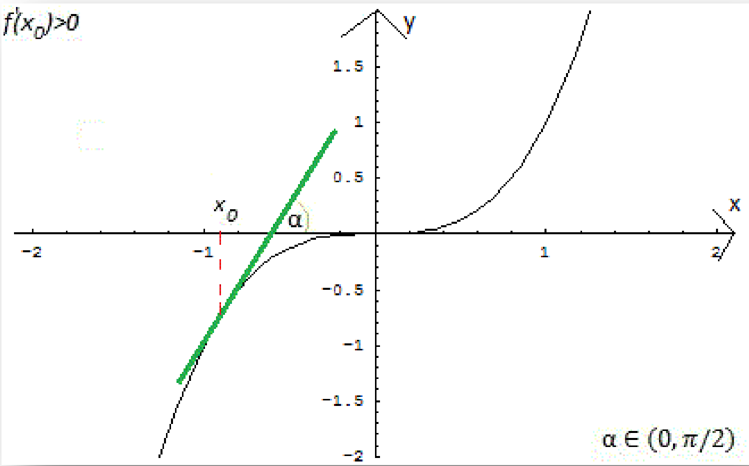


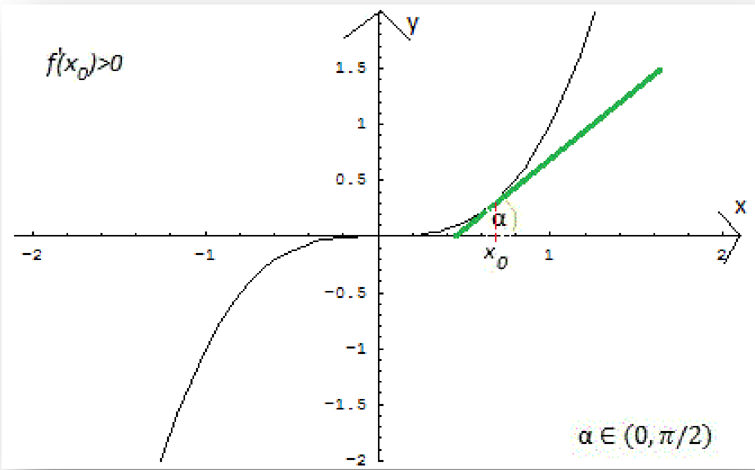
(c) Aplikacja 3

Przykładowy wykres funkcji $f(x) = x^3$ w kolorze **A**. Osie układu współrzędnych w kolorze czarnym. W górnym lewym rogu i dolnym prawym rogu czarną czcionką są opisane poniżej wzory. Tło w kolorze białym.

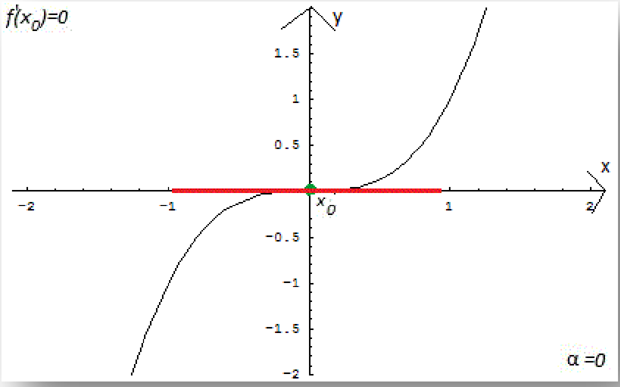
Po wykresie funkcji od lewej do prawej strony wizualizacji „ślizga się" styczna i jest zaznaczona na osi Ox zmieniająca się odcięta punktu styczności oznaczona czarną czcionką. Zmieniają się kolory stycznej. Mamy dwa przypadki:

- Styczna do wykresu funkcji jest nachylona pod kątem α ∈ $(0, \pi/2)$ do osi Ox narysowana w kolorze **C**. W kolorze o ton jaśniejszym niż **C** zaznaczony kąt z wpisanym α. Równocześnie w lewym, górnym rogu wygenerowany napis f'(x_0)>0, a w dolnym prawym rogu α ∈ $(0, \pi/2)$.





- Styczna do wykresu funkcji jest równoległa do osi Ox narysowana w kolorze **B**. Równocześnie w lewym, górnym rogu wygenerowany napis „f'(x_0)=0", a w dolnym prawym rogu α=0.



Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

Moduł ten ma charakter animacji wymagającej od użytkownika jedynie klikania jednej z kilku opcji. Zatem na urządzeniach mobilnych nie ma potrzeby ograniczania żadnej funkcjonalności modułu.

2.8. Wizualizacja obrazująca zagadnienia z geometrii analitycznej trójwymiarowej

Na wizualizację składają się aplikacje mające na celu uzupełnienie e-materiałów dydaktycznych dotyczących rozwiązywania zagadnień z zakresu geometrii analitycznej w przestrzeni trójwymiarowej.

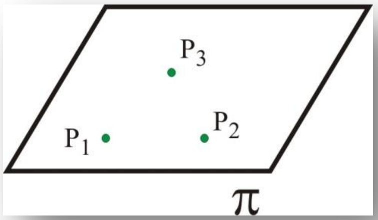
Aplikacje nie wymagają zaawansowanej interakcji z użytkownikiem. Mają charakter samoodtwarzającej się wizualizacji pojęcia. Użytkownik musi mieć tylko możliwość zatrzymania aplikacji w dowolnej chwili oraz ponownego uruchomienia od momentu wstrzymania.

Kolejne schematy pokazują kolejne elementy generowane w jednym oknie aplikacji.

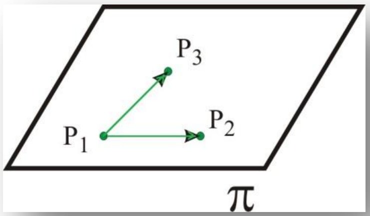
Przykładowy wygląd wizualizacji

(a) Aplikacja 1 „Trzy punkty i płaszczyzna”

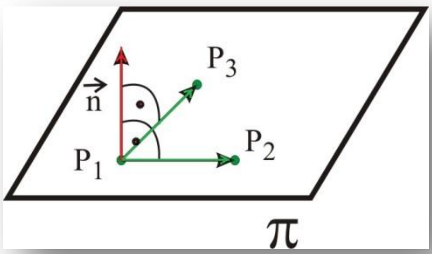
Zaznaczono brzegi płaszczyzny i jej oznaczenie π kolorem **A**, kropki oznaczające punkty w kolorze **B**, a ich oznaczenia P_1, P_2, P_3 w kolorze **A**.



Następnie generowane są wektory w kolorze **C**.

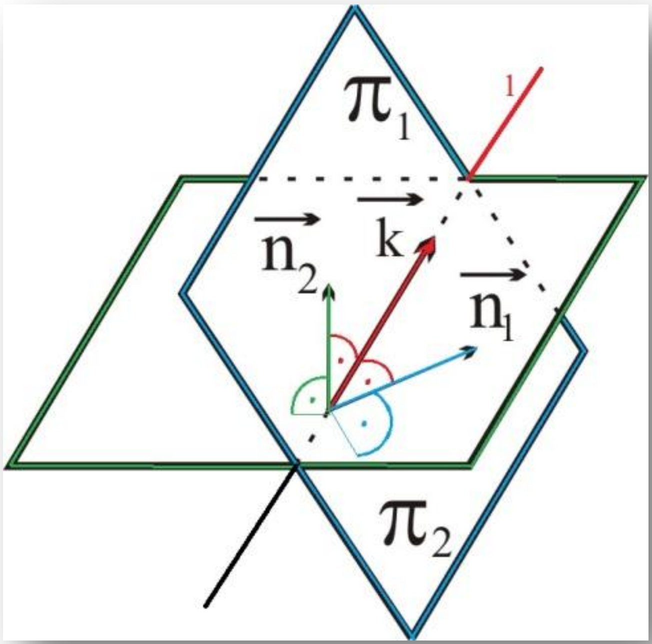


W ostatnim etapie rysowany jest wektor prostopadły do tych dwóch wektorów w kolorze **D**. Zaznaczone są kąty proste pomiędzy wektorami. Zaznaczono też wektor normalny $\vec{n}$ w kolorze **A**.



(b) Aplikacja 2 „prosta jako przecięcie dwóch płaszczyzn"

Aplikacja docelowo ma wygenerować rysunek z dwiema płaszczyznami π_1, π_2 w kolorach **A** i **B**, ich wektorami normalnymi (prostopadłymi odpowiednio do każdej z płaszczyzn) $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ (w kolorach **A** i **B**) oraz prostą l i jej wektorem kierunkowym $\vec{k}$, które są zaznaczone kolorem **C**.



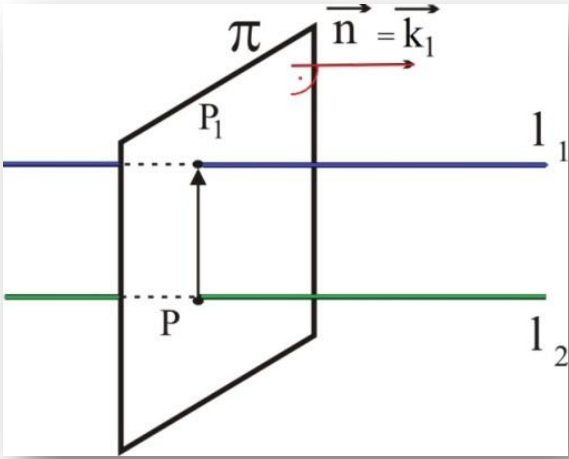
Mamy kolejno generujące się:

- dwie przecinające się płaszczyzny π_1, π_2 w kolorach **A** i **B,**
- prostą powstała z przecięcia płaszczyzn w kolorze **C,**
- wektory normalne tych płaszczyzn w kolorach **A** i **B** z zaznaczonymi kątami prostymi pomiędzy płaszczyznami i ich wektorami,
- wektor kierunkowy prostej w kolorze **C** z zaznaczonymi kątami prostymi pomiędzy nim, a wektorami kierunkowymi.

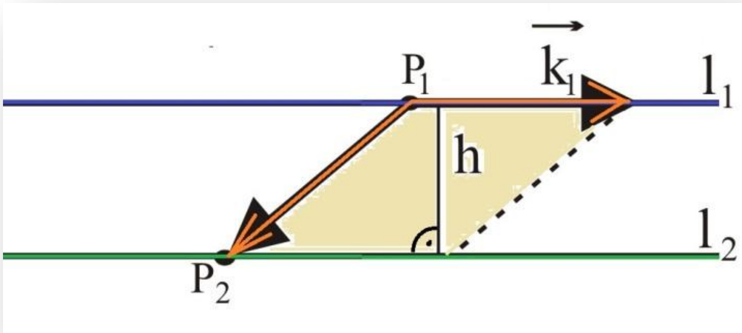
(c) Aplikacja 3 „Odległość między prostymi równoległymi (przypadek A)"

Mamy kolejno generujące się sytuacje:

- dwie proste róznoległe l_1 oraz l_2 w kolorach **A** i **B**
- zaznaczony jest punktem P_1 na prostej $l_{1,}$
- pojawia się płaszczyzna π prostopadła do tych prostych, przechodząca przez punkt P_1 z zaznaczonym wektorem $\vec{n}$ prostopadłym do płaszczyzny, który jest równległy do wektora kierunkowego k_1 prostej l_1, pojawia się oznaczenie kąta prostego przy wektorze $\vec{n}$,
- pojawia się punkt P, który jest punktem wspólnym płaszczyzny i prostej $l_{2,}$
- pojawia się wektor łączący punkt P z punktem P_1.



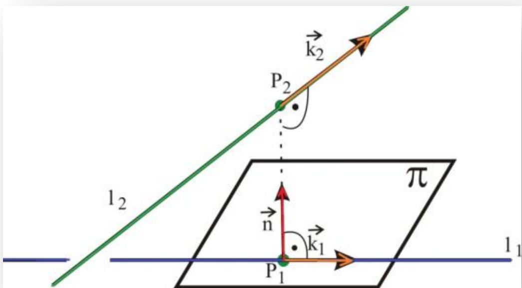
(d) Aplikacja 4 „Odległość między prostymi równoległymi (przypadek B)”



Mamy kolejno generujące się sytuacje:

- dwie proste róznoległe l_1 oraz l_2 w kolorach **A** i **B**
- zaznaczony jest punktem P_1 na prostej l_1 i P_2 na prostej $l_{2,}$
- zaznaczony jest wektor kierunkowy $\overrightarrow{k_1}$ prostej l_1 oraz wektor łączący punkty P_1 i $P_{2,}$
- pojawia się równoległobok rozpięty na wektorach $\overrightarrow{k_1}$ oraz $P_1P_{2,}$
- zaznaczona jest wysokość tego równoległoboku h, która jest prostopadła do prostej l_2 i zaznaczony jest kąt prosty pomiędzy prostą l_2 i wysokością h.

(e) Aplikacja 5 „Odległość między prostymi skośnymi (przypadek A)”



Mamy kolejno generujące się:

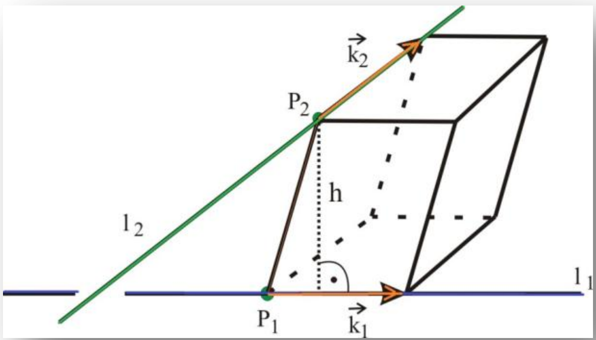
- dwie proste skośne l_1 oraz l_2 z zaznaczonym punktem P_1 na prostej l_1 i P_2 na prostej l_2,
- zaznaczone są wektor kierunkowy $\overrightarrow{k_1}$ prostej l_1 oraz wektor kierunkowy $\overrightarrow{k_2}$ prostej l_2,
- zaznaczony jest odcinek łączący proste skośne l_1 oraz l_2 o końcach w P_1 i P_2,
- pojawia się płaszczyzna π, która jest równoległa do prostych skośnych l_1 oraz l_2 z zaznaczonymi kątami prostymi pomiędzy odcinkiem o końcach w P_1 i P_2 i prostymi skośnymi l_1 oraz l_2,
- zaznaczony jest wektor prostopadły do płaszczyzny oznaczony przez $\vec{n}$.

Proste, punkty (P_1, P_2), wektory kierunkowe ($\overrightarrow{k_1}$, $\overrightarrow{k_2}$) prostych oraz płaszczyzna i wektor do niej prostopadły $\vec{n}$ są odpowiednio w różnych kolorach.

(f) Aplikacja 6 „Odległość między prostymi skośnymi (przypadek B)”

Mamy kolejno generujące się:

- dwie proste skośne l_1 oraz l_2 z zaznaczonym punktem P_1 na prostej l_1 i P_2 na prostej l_2,
- zaznaczone są wektor kierunkowy $\overrightarrow{k_1}$ prostej l_1 oraz wektor kierunkowy $\overrightarrow{k_2}$ prostej l_2,
- zaznaczony jest odcinek łączący proste skośne l_1 oraz l_2 o końcach w P_1 i P_2,
- pojawia się równoległościan rozpięty na wektorach: kierunkowym $\overrightarrow{k_1}$ prostej l_1, kierunkowym $\overrightarrow{k_2}$ prostej l_2 i wektorze o końcach w P_1 i P_2,
- zaznaczony jest odcinek h, który jest wysokością równoległościanu z zaznaczonym kątem prostym.



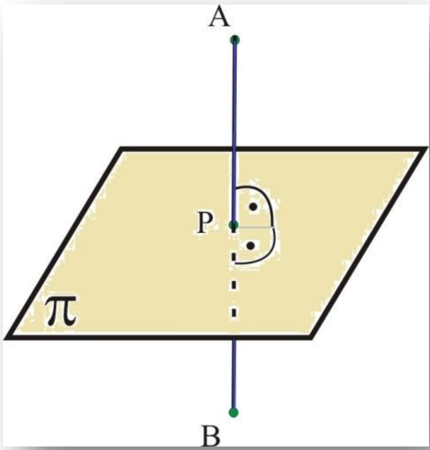
Proste, punkty (P_1, P_2), wektory kierunkowe ($\overrightarrow{k_1}$, $\overrightarrow{k_2}$) prostych oraz równoległościan są odpowiednio pokolorowane różnymi kolorami.

(g) Aplikacja 7 „Symetria względem płaszczyzny”

Mamy kolejno generujące się:

- płaszczyznę π oraz punkt A,
- stopniowo pojawia się odcinek łączący punkt A z płaszczyzną π, punkt P, zaznaczony kąt prosty prostymiędzy odcinkiem, a płaszczyzną,

- odcinek zostaje przedłużony pod płaszczyznę i w odległości takiej jak odległość pomiędzy punktem A i P pojawia się punkt B, zaznaczony jest kąt prosty pomiędzy odcinkiem łączącym P z B, a płaszczyzną π.

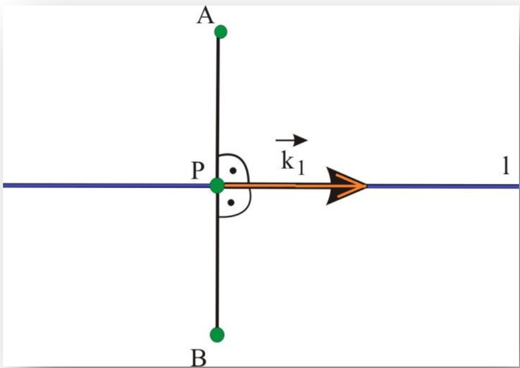


Płaszczyzna i punkty (A, B, P) oraz odcinki je łączące (A z P oraz P z B) są odpowiednio zaznaczone w różnych kolorach.

(h) Aplikacja 8 „Symetria względem prostej"

Mamy kolejno generujące się:

- prostą l oraz punkt A leżący poza prostą,
- poajwia się wektor kierunkowy $\overrightarrow{k_1}$ prostej (równoległy do prostej, w tym przypadku zaznaczony an porstej)
- stopniowo pojawia się odcinek łączący punkt A z prostą l, punkt P, zaznaczony kąt prosty prosty między odcinkiem, a prostą l,
- odcinek zostaje przedłużony pod prostą i w odległości takiej jak odległość pomiędzy punktem A i P pojawia się punkt B, zaznaczony jest kąt prosty pomiędzy odcinkiem łaczącym P z B, a prostą l.



Prosta, punkty (A, B, P) oraz wektor kierunkowy $\overrightarrow{k_1}$ prostej są odpowiednio w różnych kolorach.

Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

Moduł ten ma charakter animacji wymagającej od użytkownika jedynie klikania jednej z kilku opcji. Zatem na urządzeniach mobilnych nie ma potrzeby ograniczania żadnej funkcjonalności modułu.

2.9. Wizualizacja obrazująca zagadnienie poszukiwania funkcji odwrotnej

Na wizualizację składają się aplikacje mające na celu uzupełnienie e-materiałów dydaktycznych dotyczących poszukiwania funkcji odwrotnej.

Aplikacje nie wymagają zaawansowanej interakcji z użytkownikiem. Mają charakter samoodtwarzającej się wizualizacji pojęcia.

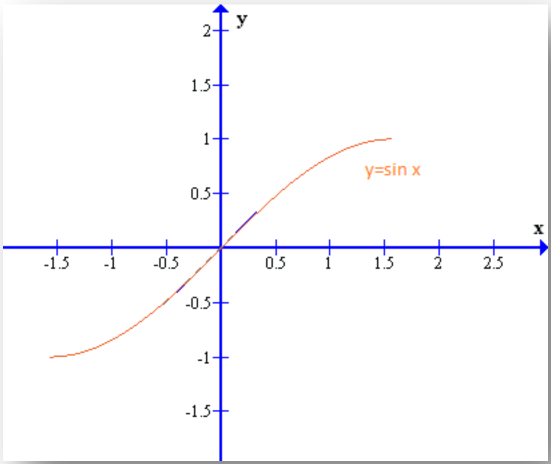
Kolejne schematy pokazują kolejne elementy generowane w jednym oknie aplikacji.

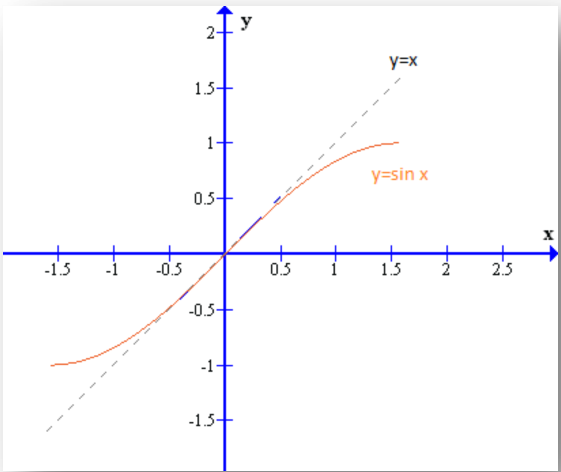
Przykładowy wygląd wizualizacji

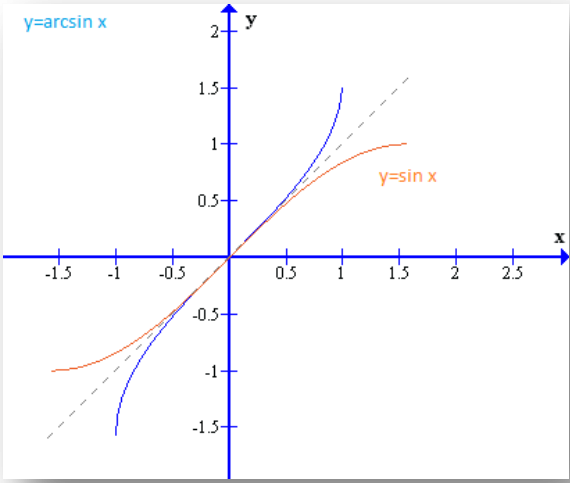
(a) Aplikacja 1 „Funkcje cyklometryczne – arcus sinus”

Wygenerowane zostają kolejno:

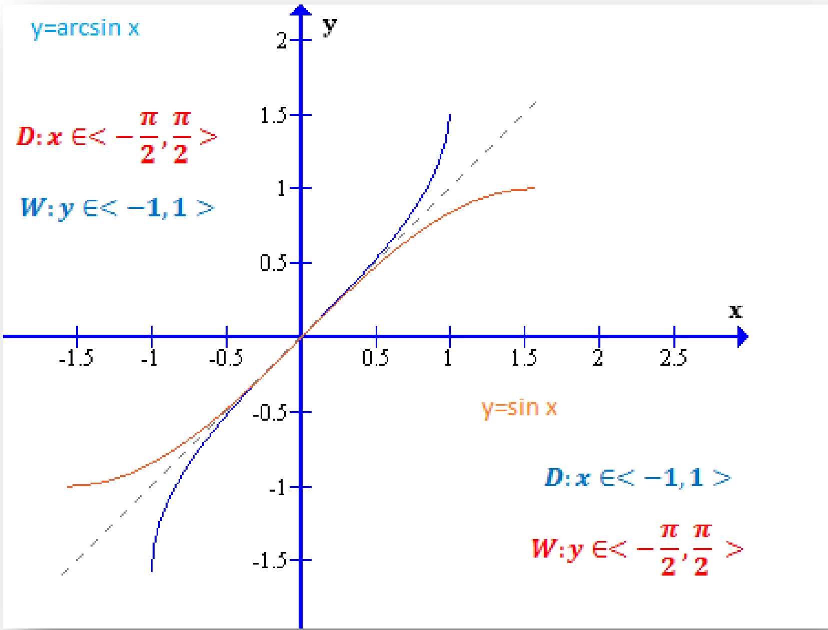
- wykres funkcji sinus x w kolorze **A** z zaznaczonym na osi Ox zbiorem będącym dziedziną <-π/2,π/2 > i na osi zbiorem wartości Oy <-1,1>,
- prosta y=x linią przerywaną w kolorze **B**,
- wykres funkcji arcus sinus x w kolorze **C**.







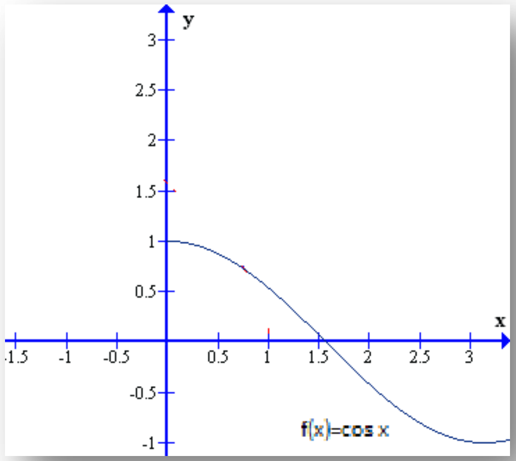
Na końcu wypisane zostają dziedzina oraz zbiór wartości funkcji zaznaczone różnymi kolorami – przy czym kolory zastosowane są wymiennie – aby podkreślić, że dziedzina sinusa staje się zbiorem wartości funkcji arcus sinus, a zbiór wartości sinusa dziedziną funkcji arcus sinus.

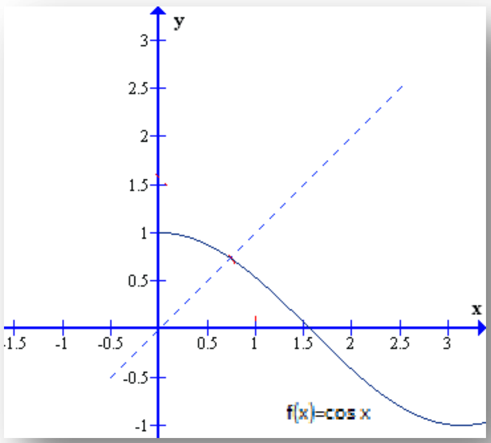


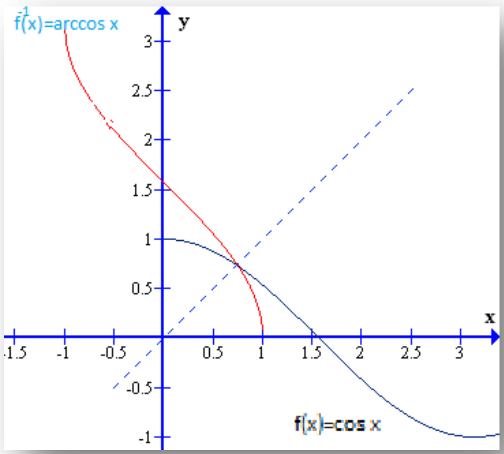
(b) Aplikacja 2 „Funkcje cyklometryczne – arcus cosinus"

Wygenerowane zostają kolejno:

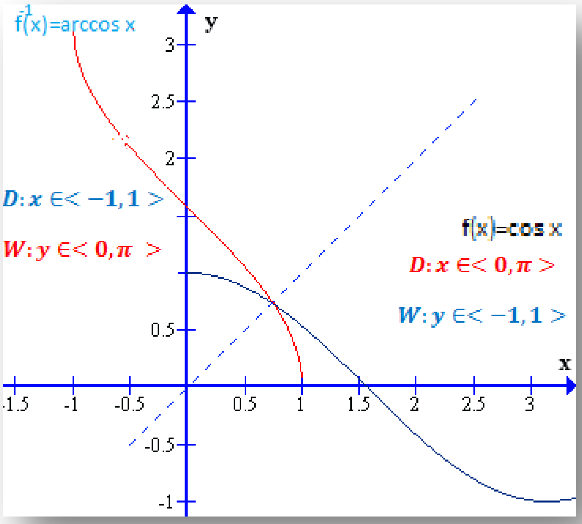
- wykres funkcji cosinus x w kolorze **A** z zaznaczonym na osi Ox zbiorze będącym dziedziną <0,π > i na osi Oy <-1,1>,
- prosta y=x linią przerywaną w kolorze **B**,
- wykres funkcji arcus cosinus x w kolorze **C**.







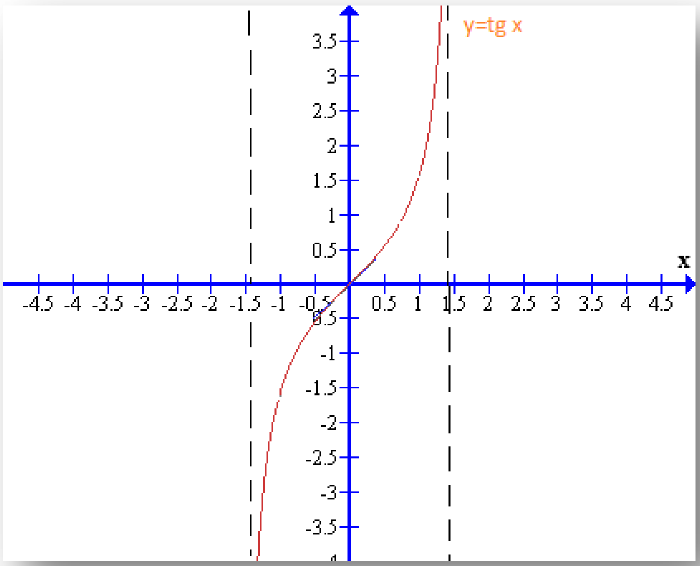
Na końcu wypisane zostają dziedzina oraz zbiór wartości funkcji zaznaczone różnymi kolorami – przy czym kolory zastosowane są wymiennie – aby podkreślić, że dziedzina cosinusa staje się zbiorem wartości funkcji arcus cosinus, a zbiór wartości cosinusa dziedziną funkcji arcus cosinus.

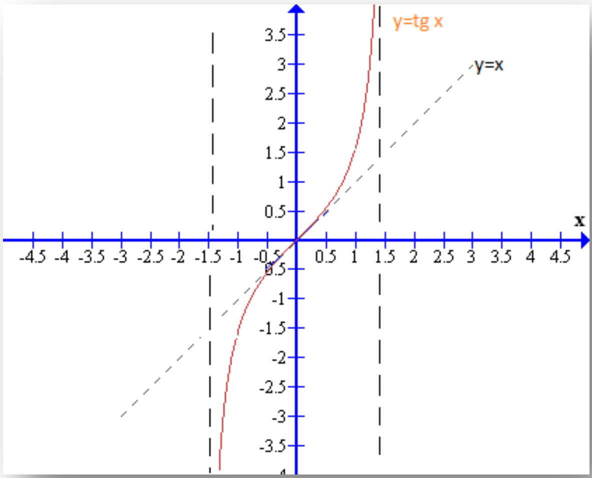


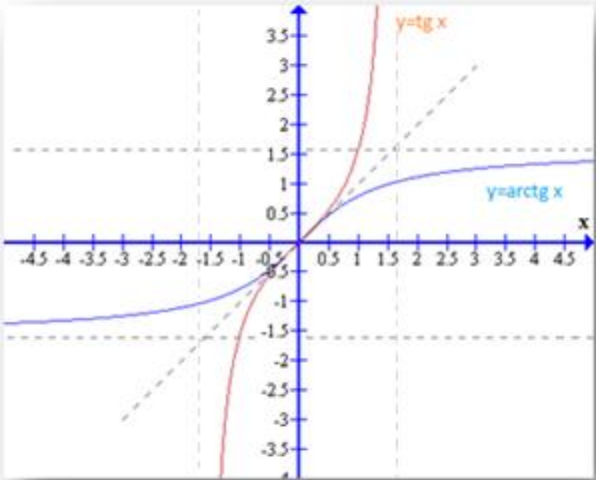
(c) Aplikacja 3 „Funkcje cyklometryczne – arcus tangens"

Wygenerowane zostają kolejno:

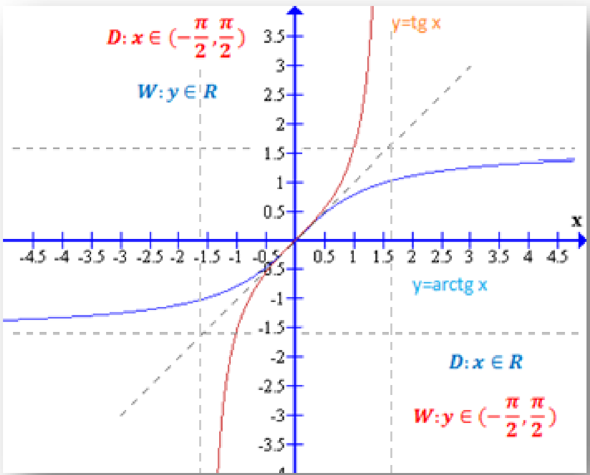
- wykres funkcji tangens x w kolorze **A** z zaznaczonym na osi Ox zbiorze będącym dziedziną (-π/2,π/2),
- prosta y=x linią przerywaną w kolorze **B**,
- wykres funkcji arcus tangens x w kolorze **C**.







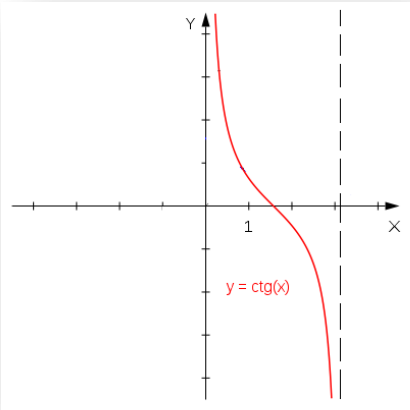
Na końcu wypisane zostają dziedzina oraz zbiór wartości funkcji zaznaczone różnymi kolorami – przy czym kolory zastosowane są wymiennie – aby podkreślić, że dziedzina tangensa staje się zbiorem wartości funkcji arcus tangens, a zbiór wartości tangensa dziedziną funkcji arcus tangens.

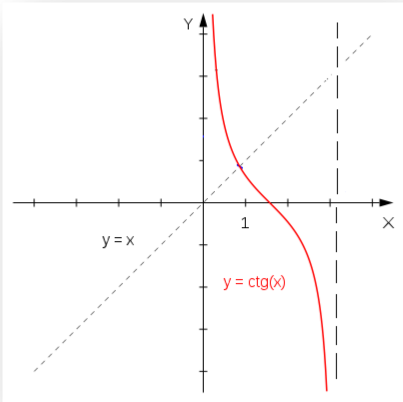


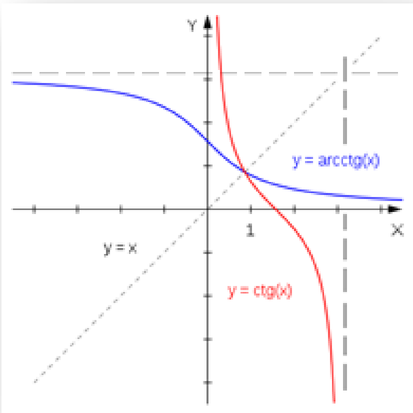
(d) Aplikacja 4 „Funkcje cyklometryczne – arcus cotangens”

Wygenerowane zostają kolejno:

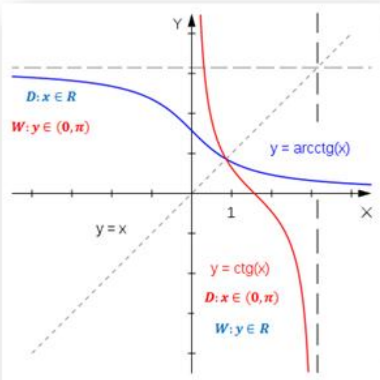
- wykres funkcji cotangens x w kolorze **A** z zaznaczonym na osi Ox zbiorze będącym dziedziną (0,π),
- prosta y=x linią przerywaną w kolorze **B**,
- wykres funkcji arcus tangens x w kolorze **C**.







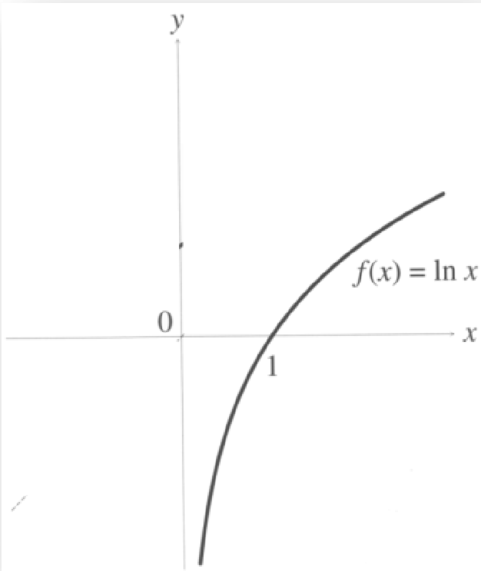
Na końcu wypisane zostają dziedzina oraz zbiór wartości funkcji zaznaczone różnymi kolorami – przy czym kolory zastosowane są wymiennie – aby podkreślić, że dziedzina cotangensa staje się zbiorem wartości funkcji arcus cotangens, a zbiór wartości cotangensa dziedziną funkcji arcus cotangens.

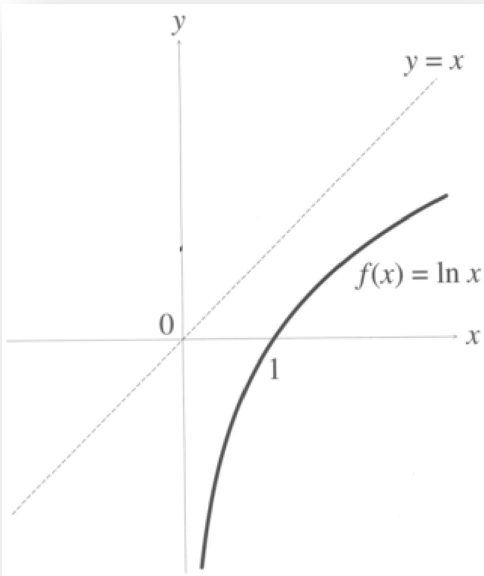


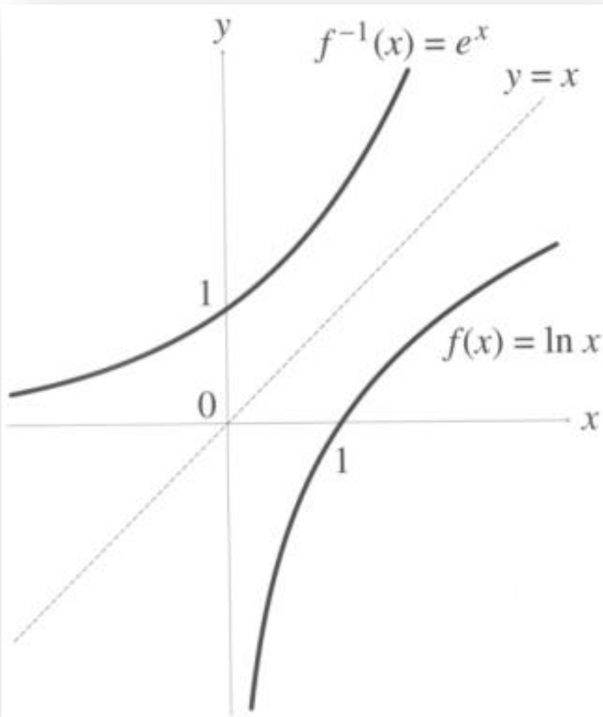
(e) Aplikacja 5 „Funkcje logarytmiczne – logarytm naturalny”

Wygenerowane zostają kolejno:

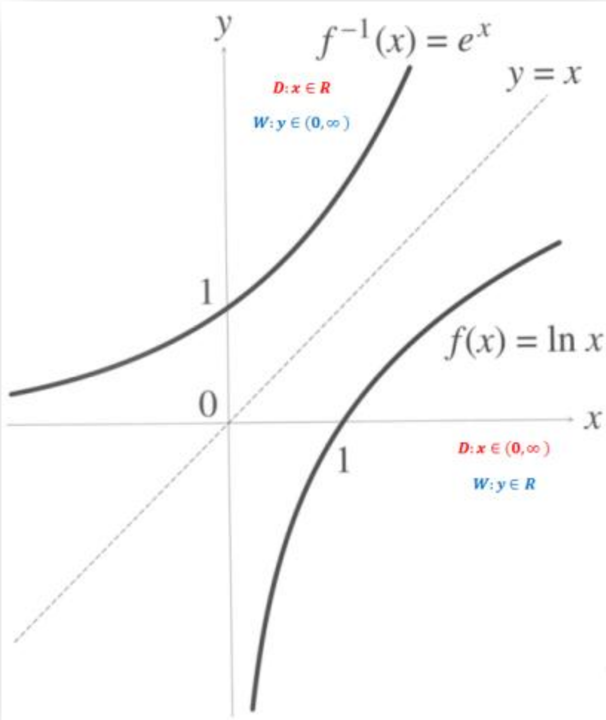
- wykres funkcji logarytm naturalny z x w kolorze **A** z zaznaczonym punktem przecięcia z osią Ox,
- prosta y=x linią przerywaną w kolorze **B**,
- wykres funkcji e^x w kolorze **C**.





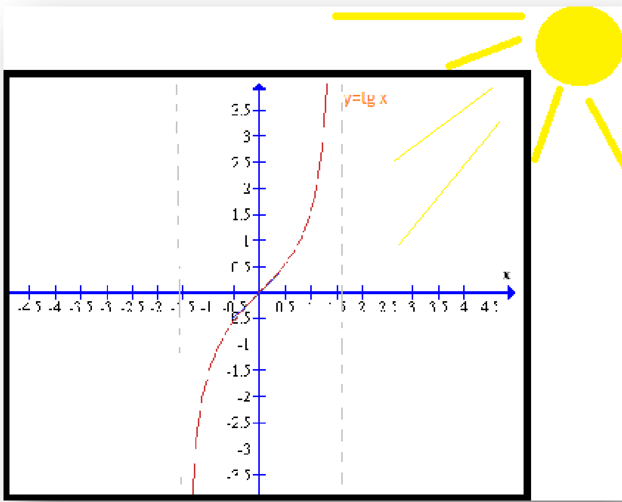


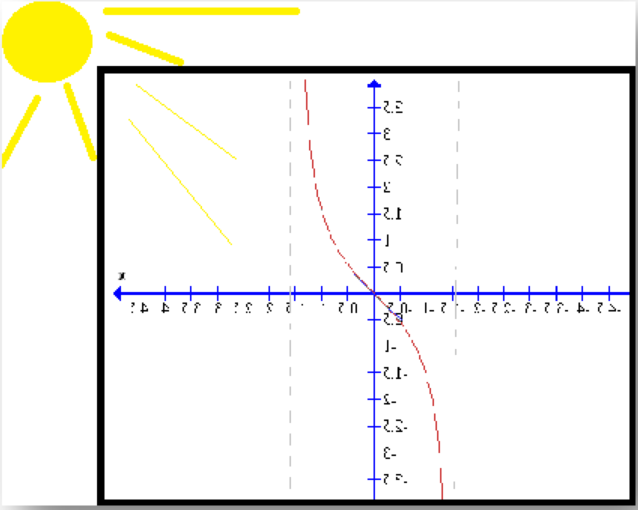
Na końcu wypisane zostają dziedzina oraz zbiór wartości funkcji zaznaczone różnymi kolorami – przy czym kolory zastosowane są wymiennie – aby podkreślić, że dziedzina logarytmu staje się zbiorem wartości funkcji e^x, a zbiór wartości logarytmu dziedziną funkcji e^x.

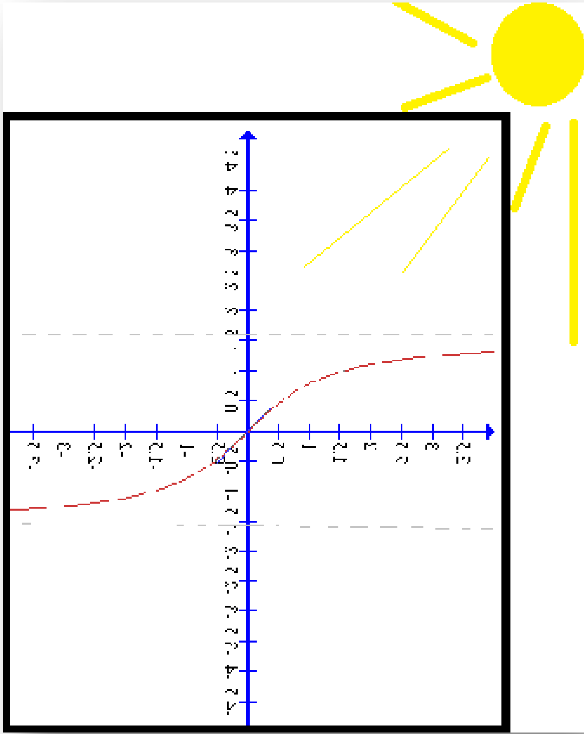


(f) Aplikacja 6 „Funkcje odwrotne - trik”

Aplikacja ma wyjaśniać „intuicyjny” sposób generowania wykresu funkcji odwrotnej do danej na podstawie wykresu funkcji tangens i arcus tangens. Animacja ma przedstawiać kartkę z „półprzezroczystego” materiału trzymaną przez dłoń, na którym narysowany jest wykres funkcji tangens z zaznaczonymi asymptotami w x=-π/2 oraz x=π/2 oraz oznaczeniami osi współrzędnych przez litery X oraz Y. Ręka obraca kartkę o 180° wokół osi Y przez co rysunek staje się trochę bledszy, ale ciągle wyraźny. Następnie kartka zostaje odwrócona o 90° w prawo. Na początku wykres jest nadal bledszy, a następnie staje się coraz wyraźniejszy. Zaznaczone są cały czas asymptoty, a na końcu nazwy osi zmieniają oznaczenia z X na Y oraz z Y na X.







Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

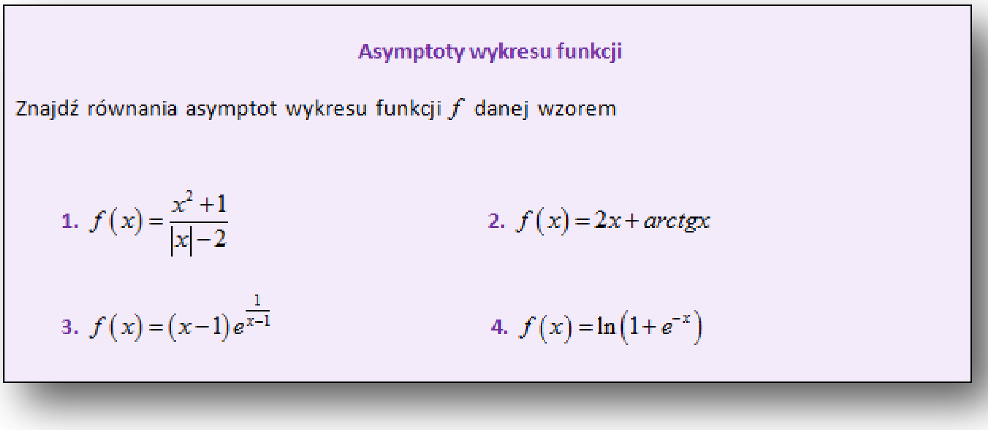
Moduł ten ma charakter animacji wymagającej od użytkownika jedynie klikania jednej z kilku opcji. Zatem na urządzeniach mobilnych nie ma potrzeby ograniczania żadnej funkcjonalności modułu.

2.10. Wizualizacja utrwalająca sposób wyznaczania asymptot

Wizualizacja ma umożliwić użytkownikowi prześledzenie kilku przykładów wyznaczania asymptot. Powinna mieć ona formę interaktywnej prezentacji z możliwością różnego przebiegu ścieżki rozwiązań – w zależności od opcji wybranej przez użytkownika.

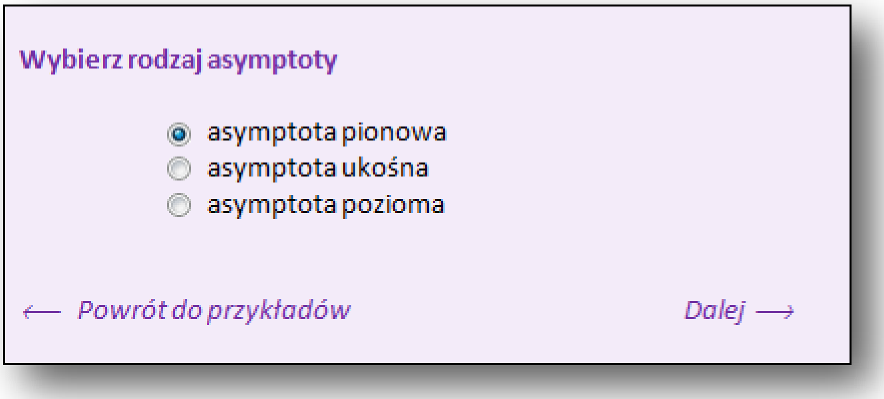
Przebieg prezentacji

Na pierwszym slajdzie użytkownik wybiera jeden z czterech ustalonych przykładów.



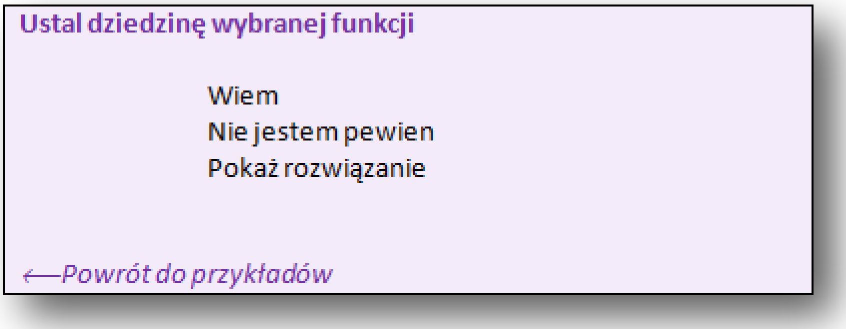
Slajd 1 – wybór przykładu

Po kliknięciu na wybrany przykład ukazuje się kolejny slajd, na którym użytkownik określa, jaki rodzaj asymptoty chciałby wyznaczyć.



Slajd 2 – wybór rodzaju asymptoty

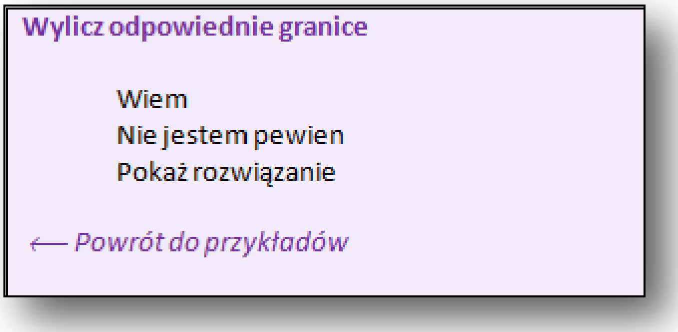
Niezależnie od wyboru asymptoty Zamawiający chce, by użytkownik zaczynał rozwiązanie zawsze od ustalenia dziedziny danej funkcji.



Slajd 3 – wyznaczanie dziedziny

Jeżeli użytkownik wybierze opcję „Wiem”, na ekranie powinno się pojawić okienko z prawidłową odpowiedzią (tzn. opisem dziedziny funkcji), umożliwiając Użytkownikowi sprawdzenie poprawności swojej odpowiedzi i możliwością przejścia dalej do Slajdu 4. Jeżeli użytkownik wybierze opcję „Nie jestem pewien”, na ekranie powinno pojawić się okienko z podpowiedzią umożliwiającą użytkownikowi samodzielne rozwiązanie problemu i z przyciskiem pokazującym prawidłową odpowiedź. Zamawiający chce by użytkownik po próbie samodzielnego rozwiązania mógł wybrać opcje dalszego rozwiązywania zadania (przejście do Slajdu 4). Po naciśnięciu „Pokaż rozwiązanie” na ekranie pojawi się okienko z prawidłowym rozwiązaniem i możliwością przejścia dalej do Slajdu 4.

Slajd czwarty opisuje granice, które należy obliczyć w celu wyznaczenia asymptoty.



Slajd 4 – obliczanie granic

Po kliknięciu na „Wiem”, użytkownik zobaczy granice wraz z ich wartościami (lecz bez pokazania kroków pośrednich), będzie miał możliwość przejścia do następnego slajdu. Po kliknięciu na „Nie jestem pewien”, użytkownik przeczyta krótkie wprowadzenie teoretyczne i zobaczy listę granic do obliczenia (lecz nie ich wyniki!) – na tym slajdzie powinien się także znaleźć przycisk „Pokaż rozwiązanie” oraz „Dalej” - aktywny dopiero po zobaczeniu rozwiązania. Po kliknięciu „Pokaż rozwiązanie” na slajdzie 4, użytkownik zobaczy wstęp teoretyczny oraz wartości granic wraz z pośrednimi krokami rozwiązania, będzie też mógł przejść do Slajdu 5.

Ustal istnienie asymptoty *[tutaj rodzaj: pionowej, poziomej lub ukośnej]*

Wiem
Nie jestem pewien
Pokaż rozwiązanie

⟵ Powrót do granic

Slajd 5 – podsumowanie wyników

Na piątym slajdzie użytkownik będzie mógł zobaczyć podsumowanie swoich obliczeń. Po kliknięciu na „Wiem", użytkownik zobaczy krótki tekst informujący o rodzaju asymptoty. Po kliknięciu na „Nie jestem pewien" użytkownik zobaczy wskazówkę dotyczącą rozwiązania, będzie miał też do dyspozycji przycisk „Pokaż rozwiązanie". Po kliknięciu na „Pokaż rozwiązanie" na slajdzie 5, użytkownik zobaczy szczegółowe rozwiązanie problemu, wraz z elementami teorii. Niezależnie od wybranej opcji użytkownik powinien mieć możliwość zobaczenia wykresu funkcji wraz z jej asymptotami. Opcja zobaczenia wykresu powinna być nieaktywna tylko gdy użytkownik wybrał „Nie jestem pewien" lecz nie kliknął potem na „Pokaż rozwiązanie".

Slajd 6 – rysowanie wykresu – powinien być zaopatrzony we wzór funkcji, dziedzinę funkcji, równania asymptoty wyznaczonej przez użytkownika oraz dwie opcje narysowania wykresu:

- wykres funkcji i asymptoty wyznaczonej przez użytkownika,
- wykres funkcji i wszystkich asymptot danej funkcji.

Przycisk „Wyjdź" powinien się uaktywnić dopiero po tym, jak użytkownik zobaczy jeden z wykresów.

Rozwiązanie

[tutaj wzór funkcji]
[tutaj dziedzina funkcji]
[tutaj opis asymptoty wyznaczanej przez użytkownika]

Rysuj wykres badanej asymptoty i wykres funkcji
Rysuj wykresy wszystkich asymptot i wykres funkcji

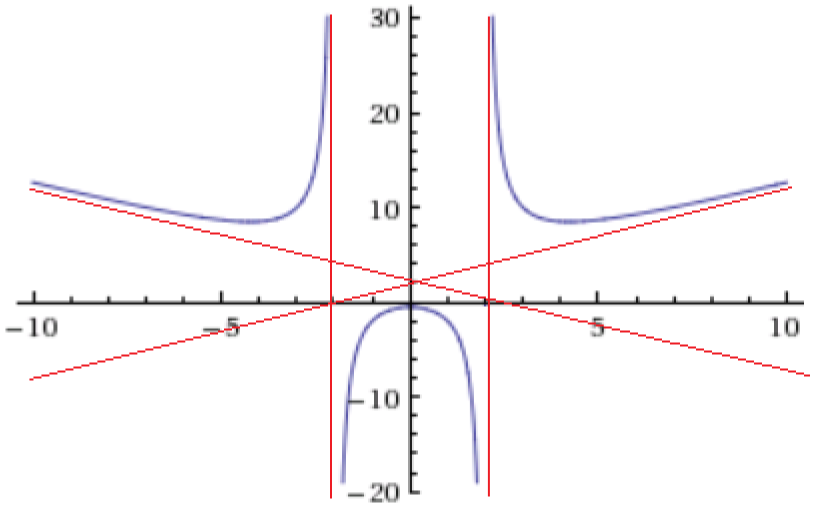
⟵ Powrót do przykładów *Wyjdź ⟶*

Slajd 6 – rozwiązanie i wykres

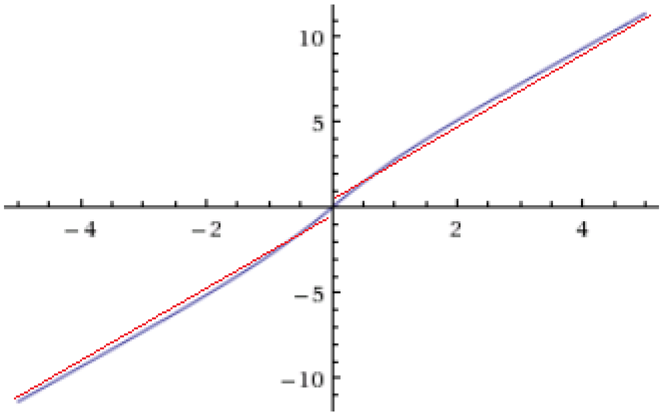
Przykłady i szczegółowe rozwiązania

Wykonawca opracuje mechanizm umożliwiający Zamawiającemu usuwanie bądź dodawanie przykładów wraz z odpowiednimi elementami ich rozwiązań w odpowiednim formacie danych. Poniższe przykłady stanowić będą jedynie pakiet startowy dla opisywanej aplikacji.

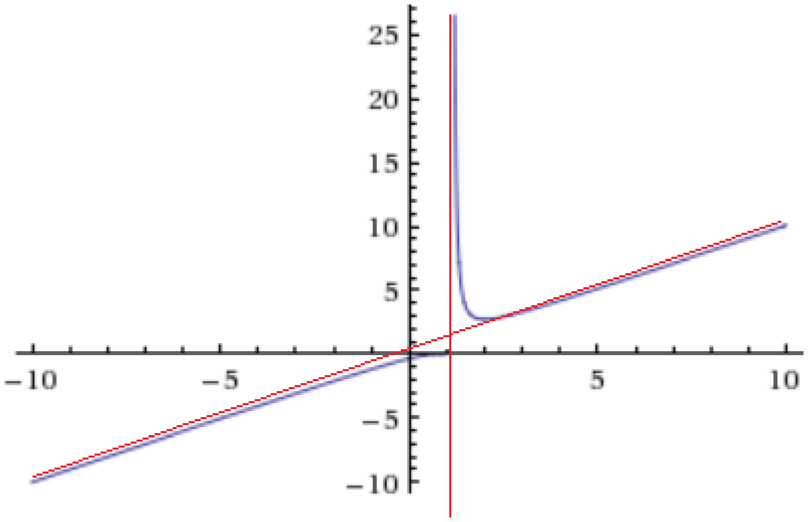
Przykład 1.	$f(x) = \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2}$
Dziedzina	$x \in \mathbf{R}\backslash\{-2,+2\}$
Wskazówka do dziedziny	Wyrażenie w mianowniku nie może być równe zero.
Szczegółowe wyznaczenie dziedziny	$\lvert x\rvert - 2 \neq 0$ $\lvert x\rvert \neq 2$ $x \neq 2 \ \wedge\ x \neq -2$ $x \in \mathbf{R}\backslash\{-2,+2\}$
Granice	
Dla asymptot pionowych	$\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2} = \{\lvert x\rvert - 2 = -x-2\} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+1}{-x-2} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2} = \{\lvert x\rvert - 2 = -x-2\} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+1}{-x-2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2} = \{\lvert x\rvert - 2 = x-2\} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2} = \{\lvert x\rvert - 2 = x-2\} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$
Dla asymptot ukosnych	$a_- = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x(\lvert x\rvert - 2)} = \{\lvert x\rvert - 2 = -x-2\} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x(-x-2)} =$ $= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{-x^2-2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(-1-\frac{2}{x})} = -1$ $b_- = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2} + x\right) = \{\lvert x\rvert - 2 = -x-2\} = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{-x-2} + x\right) =$ $= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1-x^2-2x}{-x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x+1}{-x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(-2+\frac{1}{x})}{x(-1-\frac{2}{x})} = 2$ $a_+ = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x(\lvert x\rvert - 2)} = \{\lvert x\rvert - 2 = x-2\} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x(x-2)} =$ $= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = 1$ $b_+ = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2} - x\right) = \{\lvert x\rvert - 2 = x-2\} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x-2} - x\right) =$ $= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = 2$
Dla asymptot poziomych	- te same granice co dla asymptot ukośnych, - dodatkowo: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2} = \{\lvert x\rvert - 2 = -x-2\} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{-x-2} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{\lvert x\rvert - 2} = \{\lvert x\rvert - 2 = x-2\} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \infty$
Wnioski	
Asymptoty pionowe	Istnieją asymptoty pionowe obustronne x=2 i x=-2.
Asymptoty	Istnieją asymptoty ukośne:

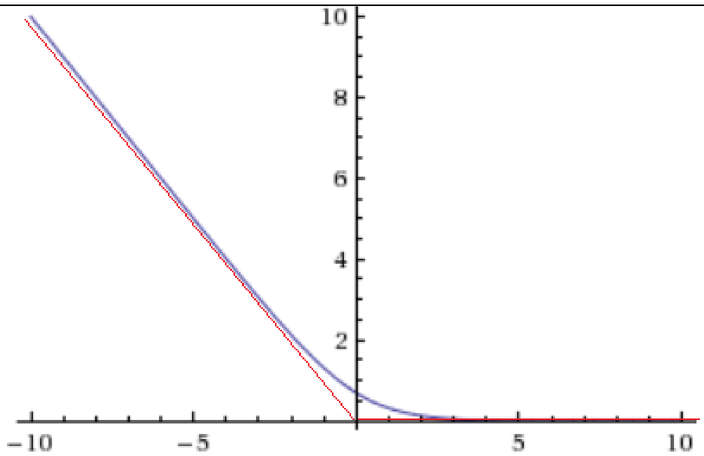
ukośne	prawostronna asymptota y=x+2 lewostronna asymptota y=-x+2
Asymptoty poziome	Brak asymptot poziomych.
Wykres	

Przykład 2.	$f(x) = 2x + arctg(x)$
Dziedzina	$x \in \mathbf{R}$
Wskazówka do dziedziny	Jaka jest dziedzina funkcji *arctg*?
Szczegółowe wyznaczenie dziedziny	$x \in \mathbf{R}$
Granice	
Dla asymptot pionowych	*brak, ze względu na dziedzinę*
Dla asymptot ukosnych	$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + arctg(x)}{x} = 2 + \left[-\frac{\pi/2}{\infty}\right] = 2$ $b_- = \lim_{x\to-\infty} (2x + arctg(x) - 2x) = -\frac{\pi}{2}$ $a_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + arctg(x)}{x} = 2 + \left[\frac{\pi/2}{\infty}\right] = 2$ $b_+ = \lim_{x\to+\infty} (2x + arctg(x) - 2x) = \frac{\pi}{2}$
Dla asymptot poziomych	- te same granice co dla asymptot ukośnych, - dodatkowo: $\lim_{x\to-\infty} \big(2x + arctg(x)\big) = -\infty - \frac{\pi}{2} = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \big(2x + arctg(x)\big) = \infty + \frac{\pi}{2} = \infty$
Wnioski	
Asymptoty pionowe	Brak asymptot pionowych.
Asymptoty ukośne	Istnieją asymptoty ukośne: prawostronna asymptota y=2x+π/2 lewostronna asymptota y=2x-π/2

Asymptoty poziome	Brak asymptot poziomych.
Wykres	

Przykład 3.	$f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$
Dziedzina	$x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$
Wskazówka do dziedziny	Wyrażenie w mianowniku nie może być równe zero
Szczegółowe wyznaczenie dziedziny	$x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ $x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$
Granice	
Dla asymptot pionowych	$\lim_{x\to 1^-}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = \left\{x-1 \to 0^-, \frac{1}{x-1} \to -\infty\right\} = [0^- \cdot e^{-\infty}] = [0\cdot 0] = 0$ $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = \left\{x-1 \to 0^+, \frac{1}{x-1} \to +\infty\right\} = [0^- \cdot e^{+\infty}] = [0\cdot \infty] =$ $= \lim_{x\to 1^+}\frac{exp\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = e^{\infty} = \infty$
Dla asymptot ukosnych	$a_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1\cdot e^0 = 1$ $b_- = \lim_{x\to-\infty}\left((x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) - x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) - 1\right) =$ $= [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$ $= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x-x+1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\frac{-1}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$ $= \lim_{x\to-\infty}\frac{\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x-1)}\right]}{\frac{-1}{x^2}}$ $= \lim_{x\to-\infty}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\left[\frac{x}{x-1} - 1\right] = e^0\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0$

	$a_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1\cdot e^0 = 1$ $b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) - x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)-1\right) =$ $= [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)-1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$ $= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-x+1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{x-1}{x}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\frac{-1}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$ $= \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(x-1)}\right]}{\frac{-1}{x^2}}$ $= \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\left[\frac{x}{x-1}-1\right] = e^0\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0$
Dla asymptot poziomych	- te same granice co dla asymptot ukośnych, - dodatkowo: $\lim_{x\to-\infty}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = [-\infty\cdot e^0] = [-\infty\cdot 1] = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = [\infty\cdot e^0] = [\infty\cdot 1] = +\infty$
Wnioski	
Asymptoty pionowe	Istnieje asymptota prawostronna x=1.
Asymptoty ukośne	Istnieje asymptota ukośna obustronna y=x.
Asymptoty poziome	Brak asymptot poziomych.
Wykres	

Przykład 4.	$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$
Dziedzina	$x \in \mathbf{R}$
Wskazówka do dziedziny	Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej
Szczegółowe wyznaczenie dziedziny	$1 + e^{-x} > 0$ $x \in \mathbf{R}$
Granice	
Dla asymptot pionowych	*brak, ze względu na dziedzinę*
Dla asymptot ukosnych	$a_- = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{x} = \left[\frac{\ln(1+\infty)}{\infty}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+e^{-x}}(-e^{-x})}{1} =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1} = \frac{-1}{0+1} = -1$ $b_- = \lim\limits_{x\to-\infty} [\ln(1+e^{-x}) + x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) + x \right) =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} (\ln(e^x+1) - \ln(e^x) + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\ln(e^x+1) - \mathrm{x} + x) =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = \ln(0+1) = \ln(1) = 0$ $a_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{x} = \left[\frac{\ln(1+0)}{\infty}\right] = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0$ $b_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$
Dla asymptot poziomych	- te same granice co dla asymptot ukośnych, - dodatkowo: $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+\infty) = \infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+0) = 0$
Wnioski	
Asymptoty pionowe	Brak asymptot pionowych.
Asymptoty ukośne	Asymptota ukośna lewostronna y=-x.
Asymptoty poziome	Asymptota pozioma prawostronna y=0.
Wykres	

Działanie modułu na urządzeniach mobilnych

Moduł ten ma charakter animacji wymagającej od użytkownika jedynie klikania jednej z kilku opcji. Zatem na urządzeniach mobilnych nie ma potrzeby ograniczania żadnej funkcjonalności modułu.

3. Procedura obsługi błędów i testowania. Gwarancja.

Zamawiający oddeleguje osobę do prac związanych z testowaniem systemu. Strony udostępniają wzajemnie numery telefonów i adres e-mail do osób, które odpowiedzialne są za wykonanie systemu, testowanie jego funkcji oraz wdrażanie. Ustala się, iż osoby drogą telefoniczną kontaktują się w dni robocze w godzinach 9.00 – 16.00.

Oprócz osoby oddelegowanej do testowania funkcjonalności systemu, Zamawiający wyznaczy zespół konsultantów do spraw związanych z merytoryką wykonania poszczególnych modułów. Strony ustalą zasady (w tym częstotliwość) kontaktowania się Wykonawcy z konsultantami.

Bez względu na etapowe testowanie aplikacji przez przedstawiciela Zamawiającego, Wykonawca zobowiązuje się do testowania produktu etapowo oraz po zakończeniu prac.

Pod pojęciem *błędu* rozumie się wszelkiego rodzaju nieprawidłowości działania systemu, które skutkują brakiem zgodności z przedmiotem zamówienia. Za *błąd krytyczny* rozumie się taki błąd, który powoduje całkowitą niemożność korzystania z funkcjonalności modułów lub w znaczny sposób ją utrudnia.

Zgłoszenia błędu do Wykonawcy dokonuje wyłącznie upoważniona przez Zamawiającego osoba (osoby) w takiej formie, jak zostanie to ustalone przez strony. Jeżeli zgłoszenie jest niepełne, Wykonawca w okresie czasu reakcji odsyła zgłoszenie do Zamawiającego celem jego uzupełnienia. Poniższa tabela zawiera terminy dotyczące przyjmowania zgłoszeń o błędach oraz usuwania błędów.

Rodzaj błędu	Czas reakcji na zgłoszony błąd	Czas uzupełnienia zgło-szenia	Czas usunięcia błędu
Błąd krytyczny	2 dni robocze	1 dzień roboczy	2 dni robocze
Błąd niekrytyczny	4 dni robocze	1 dzień roboczy	4 dni robocze

Zamawiający potwierdza usunięcie zgłaszanego błędu. Zamawiający nie jest zobligowany czasem sprawdzenia naprawienia błędu, przyjmuje się jednak, iż jest to czas rozsądny, tak aby ewentualny brak naprawienia błędu nie był przyczyną powstawania nowych.

Jeżeli Zamawiający uważa sposób usunięcia błędu za niewłaściwy, zgłasza swoje zastrzeżenia. Zastrzeżenia Zamawiającego są traktowane jako kontynuacja zgłoszenia błędu, którego dotyczą. Od zgłoszenia zastrzeżeń Zamawiającego, liczy się ponownie czas reakcji Wykonawcy.

W okresie upowszechniania systemu:

1. Wykonawca zobowiązuje się do udzielenia Zamawiającemu łącznie do 50 godzin konsultacji w razie ewentualnych pytań dotyczących funkcjonowania systemu. Strony ustalą procedury komunikowania się w ramach konsultacji.
2. Wykonawca zobowiązuje się do usuwania błędów technicznych na zasadach opisanych powyżej.